

SEMINAR MODELLTHEORIE IN STETIGER LOGIK

LEON CHINI, TRISTAN KRETZER, MATTHIAS LITTMANN, MARCEL RAMECKERS,
TORBEN STAUD, LASSE VOGEL

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Metrische Strukturen und Signaturen	1
3. Formeln	6
4. Modelltheoretische Konzepte	12
5. Ultraprodukte und Kompaktheit	14
6. Konstruktion von Modellen	23
7. Definierbarkeit in stetiger Logik	28
Alphabetischer Index	32
Literatur	32

1. Einleitung

Aufgrund von Corona wurde Ende März / Anfang April 2020 deutlich, dass wir das Seminar nicht in der bekannten Form durchführen können, da es, zumindest zu Beginn des Sommersemesters, keine Präsenzveranstaltungen geben würde. Daraufhin stellte sich die Frage, in welcher Form wir das Seminar durchführen möchten: Soll jeder sein Thema, wie auch in der bekannten Form, über Screensharing den anderen Vorstellen oder wollen wir eine gemeinsame Arbeit zu dem Thema verfassen? Wir entschieden uns für die zweite Möglichkeit.

Es stellt sich heraus, dass in klassischer Logik erster Stufe diverse Eigenschaften, welche man beim Arbeiten in metrischen oder topologischen Räumen voraussetzen möchte, sich nicht durch Formeln beschreiben lassen. Die meisten Arbeitstechniken der Modelltheorie sind somit für solche Strukturen ungeeignet. Durch das Anpassen der Logik auf metrische Strukturen versucht man nun dieses Problem zu umgehen. In unserer Arbeit orientieren wir uns an [1] und richten uns an Personen, die schon Erfahrungen mit der Modelltheorie gemacht haben, wobei diese nur für Vergleiche zwischen der klassischen Modelltheorie und dieser in stetiger Logik nötig sind. Die Arbeit soll einen Einblick in die stetige Logik geben, angereichert um Beispiele und Vergleiche zur klassischen Modelltheorie.

Begleitet und betreut wurde das Seminar von Prof. Dr. Immanuel Halupczok, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf.

2. Metrische Strukturen und Signaturen

Bevor die Modelltheorie auf metrischen Strukturen eingeführt werden kann, ist es hilfreich, die Grundlagen der Theorie metrischer Räume einzuführen beziehungsweise an sie zu erinnern. Dabei ist das Konzept der gleichmäßigen Stetigkeit von großer Bedeutung.

Date: Sommersemester 2020.

Metrische Strukturen

Für analytische Zwecke ist die Vollständigkeit von metrischen Räumen unerlässlich, sodass wir für metrische Strukturen diese voraussetzen.

Definition 2.1. (1) Ein **metrischer Raum** (M, d) besteht aus einer Menge M und einer Abbildung $d: M \times M \rightarrow [0, \infty[$, **der Metrik**, die folgende Eigenschaften besitzt:

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad x, y \in M$ (Definitheit)
 - (ii) $d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in M$ (Symmetrie)
 - (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in M$ (Dreiecksungleichung)
- (2) Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in M auch konvergiert.

Sei von nun an M ein metrischer Raum.

- (3) M heißt **beschränkt**, falls $\sup\{d(x, y) : x, y \in M\} < \infty$. Diese Zahl nennt man **Durchmesser**.
- (4) Seien $(M, d), (M', d')$ metrische Räume und $f: M \rightarrow M'$ eine Abbildung. Eine Funktion $\Delta:]0, 1] \rightarrow]0, 1]$, heißt **(Gleichmäßiges) Stetigkeitsmodul** von f , falls sie Folgendes erfüllt: Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ und alle $x, y \in M$

$$d(x, y) < \Delta(\varepsilon) \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Die folgenden Definitionen sind die Analoga zu den Begriffen der Konstanten, Funktionen und Relationen der klassischen Modelltheorie.

Definition 2.2. Sei (M, d) ein beschränkter metrischer Raum.

- (1) Ein **Prädikat auf M** ist eine gleichmäßig stetige Funktion von M^n in das kompakte Intervall $[0, 1]$, wobei $n \in \mathbb{N}$.
- (2) Eine **Funktion auf M** ist eine gleichmäßig stetige Funktion von M^n nach M , wobei $n \in \mathbb{N}$.
- (3) Eine **Konstante** ist ein ausgezeichnetes Element aus M .
- (4) Die natürliche Zahl n in den Definitionen des Prädikates und der Funktion heißt **Stelligkeit des Prädikates/der Funktion**.
- (5) Eine **metrische Struktur \mathcal{M}** besteht aus einer Familie von Prädikaten auf M $\{R_i : i \in I\}$, einer Familie von Funktionen auf M $\{F_j : j \in J\}$ und einer Familie von Konstanten $\{a_k : k \in K\}$, für Indexamengen I, J, K . Wir schreiben diese Struktur auch als $\mathcal{M} = (M, R_i, F_j, a_k : i \in I, j \in J, k \in K)$.

Beispiel 2.3. (1) Ein **Trivialbeispiel** ist ein metrischer Raum (M, d) ohne weitere Struktur. Dies bedeutet, dass die Mengen der Prädikate, Funktionen und Konstanten alle leer sind.

- (2) Wir versuchen die klassische Modelltheorie in die metrischer Räume einzubetten. Sei dafür ein Modell \mathcal{M} gegeben. Wir setzen als Metrik die diskrete Metrik, welche Elementen x, y genau dann die Zahl 1 zuordnet, wenn $x = y$ und sonst den Wert 0 annimmt. Mit dieser Ausstattung können wir Relationen als Prädikate auffassen, die diskret die Werte 0 oder 1 annehmen. Man beachte, dass Funktionen $F: M^n \rightarrow M$ und Prädikate $R: M^n \rightarrow [0, 1]$ immer gleichmäßig stetig sind, falls man M mit der diskreten Metrik und M^n mit der zugehörigen Produktmetrik, vergleiche auch 2.6, ausstattet. Daher sind Strukturen der klassischen Modelltheorie auch metrische Strukturen.

Nun werden wir ausgehend von der Definition einer metrischen Struktur die zugehörige Signatur entwickeln.

Definition 2.4. Sei $\mathcal{M} = (M, R_i, F_j, a_k : i \in I, j \in J, k \in K)$ eine metrische Struktur. Eine **Signatur** L ist eine Vereinigung von folgenden Symbolen:

- (1) **Prädikatsymbolen** P_i , welche einem Prädikat R_i auf M zugeordnet sind.
- (2) **Funktionensymbolen** f_j , welche einer Funktion F_j auf M zugeordnet sind.
- (3) **Konstantensymbolen** c_k , welche einer Konstante a_k zugeordnet sind.

Zusätzlich gibt eine Signatur L für ein Prädikatsymbol P_i ein Stetigkeitsmodul Δ_{P_i} und für ein Funktionensymbol f_j ein Stetigkeitsmodul Δ_{f_j} an, der für die jeweiligen R_i bzw. F_j ein Stetigkeitsmodul darstellt.

Letztendlich spezifiziert L durch D_L eine obere Schranke für den Durchmesser von M , wobei wir diese ohne Einschränkung als 1 setzen.

Sind all diese Voraussetzungen erfüllt, so sagen wir, dass \mathcal{M} eine **L-Struktur** ist.

Die Begriffe der strukturerhaltenden Abbildungen aus der klassischen Modelltheorie werden im metrischen Kontext wie folgt definiert.

Definition 2.5. Sei L eine Signatur für metrische Räume und seien \mathcal{M}, \mathcal{N} metrische Strukturen.

- (1) Eine **Einbettung** von \mathcal{M} nach \mathcal{N} ist eine Isometrie $T: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$, welche mit den Interpretationen der Symbole aus L vertauscht. Das heißt, wenn f ein n -stelliges Funktionensymbol ist und $a_1, \dots, a_n \in M$, so gilt

$$f^{\mathcal{N}}(T(a_1), \dots, T(a_n)) = T(f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n));$$

wenn c ein Konstantensymbol ist, so gilt

$$c^{\mathcal{N}} = T(c^{\mathcal{M}});$$

und wenn P ein Prädikatsymbol mit Stelligkeit n ist und $a_1, \dots, a_n \in M$, so gilt

$$P^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = P^{\mathcal{N}}(T(a_1), \dots, T(a_n)).$$

- (2) Ein **Isomorphismus** von \mathcal{M} nach \mathcal{N} ist eine surjektive Einbettung. In diesem Fall heißen \mathcal{M} und \mathcal{N} **isomorph** und wir schreiben $M \cong N$.
- (3) Ein **Automorphismus** ist ein Isomorphismus von \mathcal{M} nach \mathcal{M} .
- (4) \mathcal{M} ist eine **Unterstruktur** von \mathcal{N} , falls $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ und die Einbettungsabbildung $i: M \rightarrow N, x \mapsto x$ eine Einbettung ist.

Metrische Räume

Definition 2.6. Seien (M_i, d_i) für $i = 1, \dots, n$ metrische Räume. Wir staten den Raum M^n mit der Produktmetrik

$d(x, y) := \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$, aus.

Häufig ist es einfacher, auf Mengen einen Abstands begriff zu definieren, welcher auch nicht-selben Elementen den Abstand Null zuweist. Folgende Konstruktion erlaubt es, auf kanonische Art und Weise dennoch eine vollwertige Metrik und daher einen metrischen Raum zu erhalten.

Definition 2.7. (1) (M_0, d_0) heißt **pseudometrischer Raum** und d_0 **Pseudometrik**, falls die Abbildung $d_0: M \times M \rightarrow [0, \infty[$ symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung im Sinne von 2.1 erfüllt, jedoch nur

$$d_0(x, x) = 0 \quad x \in M_0$$

gilt.

(2) Sei (M_0, d_0) ein pseudometrischer Raum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation \sim auf $M_0 \times M_0$ wie folgt:

$$x \sim y \iff d_0(x, y) = 0 \quad x, y \in M_0$$

und bezeichnen die Äquivalenzklassen mit \bar{x} . Dass \sim eine Äquivalenzrelation ist, folgt direkt aus den definierenden Eigenschaften der Pseudometrik d_0 . Wir setzen

$$M := M_0 / \sim, \quad d(\bar{x}, \bar{y}) := d_0(x, y) \quad x, y \in M_0.$$

(M, d) heißt **Quotientenraum**, welche von (M_0, d_0) induziert ist.

Im Folgenden beweisen wir grundlegende Resultate über gleichmäßig stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen und führen das für die stetige Logik wichtige Konzept der Infimums- und Supremumsfunktionen ein.

Satz 2.8. Es seien $f : M \rightarrow M'$ und $f' : M' \rightarrow M''$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen M, M', M'' und Δ, Δ' die zugehörigen (gleichmäßigen) Stetigkeitsmodule. Dann ist $\Delta(1/2 \cdot (\Delta'(\varepsilon)))$ ein Stetigkeitsmodul für $f' \circ f$, sodass $f' \circ f$ gleichmäßig stetig ist.

Beweis. Wir geben ein $\varepsilon > 0$ vor. Seien $x, y \in M$ mit $d(x, y) < \Delta(1/2 \cdot \Delta'(\varepsilon))$. Nach Definition des Stetigkeitsmoduls gilt also $d'(f(x), f(y)) < 1/2 \cdot \Delta'(\varepsilon)$, was seinerseits $d''(f'(f(x)), f'(f(y))) < \varepsilon$ und somit die Behauptung impliziert. \square

Definition 2.9. Seien $(M, d), (M', d')$ metrische Räume und $f, (f_n)_n$ Abbildungen von M nach M' . Die Funktionenfolge f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen f , falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart existiert, sodass für alle $x \in M$ und $n \geq N$

$$d'(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$$

gilt.

Satz 2.10. Seien M, M' und f_n, f wie oben. Zusätzlich seien die f_n gleichmäßig stetig und gleichmäßig konvergent gegen f . Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Ein $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Seien $x, y \in M$, noch zu spezifizierend, nah aneinander. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon/3$ gleichmäßig in $z \in M$ gilt. Zusätzlich gelte $d(x, y) < \delta$, wobei δ so gewählt ist, dass für alle $x, y \in M$ mit $d(x, y) < \delta$ bereits $d'(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ gilt, was aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f_n möglich ist. Damit erhalten wir

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Das n und δ sind unabhängig von $x \in M$, sodass diese Stetigkeit auch gleichmäßig ist. \square

Satz 2.11. Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2), (M_3, d_3)$ metrische Räume, $f, f_n : M_1 \rightarrow M_2$ und $f', f'_n : M_2 \rightarrow M_3$ für $n \in \mathbb{N}$ derartige gleichmäßig stetige Funktionen, dass f_n gleichmäßig gegen f und f'_n gleichmäßig gegen f' konvergiert. Dann konvergiert auch $f'_n \circ f_n$ gleichmäßig gegen $f' \circ f$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt ab einem $N_1 \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq N_1$, dass $|f(x) - f_n(x)|$ klein ist, wobei das N_1 nicht von $x \in M_1$ abhängt. Ab einem $N_2 \in \mathbb{N}$ gilt wiederum für alle $n \geq N_2$, dass $|f'(y) - f'_n(y)|$ klein ist und dieses N_2 ist erneut unabhängig von $y \in M_2$. Setzen wir nun $N := \max\{N_1, N_2\}$, so impliziert die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungen die Behauptung. \square

Es folgt das wichtige Konzept der Supremums- und Infimumsfunktionen, welche in der stetigen Logik anschaulich die Rolle von Quantoren einnehmen.

Definition 2.12. Es seien M, M' metrische Räume und $f: M \times M' \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Abbildung. Wir definieren die neuen Abbildungen

$$\begin{aligned} \sup_y f: M &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sup_{y \in M'} \{f(x, y) : y \in M'\} \quad \text{und} \\ \inf_y f: M &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \inf_{y \in M'} \{f(x, y) : y \in M'\}. \end{aligned}$$

Satz 2.13. Seien M, M' metrische Räume und $f: M \times M' \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige beschränkte Funktion und Δ ein gleichmäßiges Stetigkeitsmodul für f . Dann sind $\sup_y f$ und $\inf_y f$ auch gleichmäßig stetige und beschränkte Funktionen und Δ ist ein gleichmäßiges Stetigkeitsmodul für beide Abbildungen.

Beweis. Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $u, v \in M$ mit $d(u, v) < \Delta(\varepsilon)$. Wir rechnen für $z \in M'$

$$f(v, z) \leq f(u, z) + \varepsilon \leq \sup_y f(u) + \varepsilon.$$

Da $z \in M'$ beliebig war, ist es möglich das Supremum über die Ungleichung zu bilden, was $\sup_y f(v) - \sup_y f(u) \leq \varepsilon$ generiert. Ein Vertauschen von u und v in der Rechnung liefert die Beziehung $\sup_y f(u) - \sup_y f(v) \leq \varepsilon$, sodass $|\sup_y f(v) - \sup_y f(u)| \leq \varepsilon$ folgt. Damit ist $\sup_y f$ gerade gleichmäßig stetig.

Für das Infimum beachte

$$f(u, z) \leq \varepsilon + f(v, z).$$

Eine Infimumsbildung über die Ungleichung in $z \in M'$ generiert $\inf_y f(u) - \inf_y f(v) \leq \varepsilon$ und ein erneutes Symmetrieargument

$$|\inf_y f(u) - \inf_y f(v)| \leq \varepsilon.$$

Damit ist auch $\inf_y f$ gleichmäßig stetig und beide Abbildungen haben den behaupteten Stetigkeitsmodul. \square

Es sei angemerkt, dass man die Beschränktheit der Funktion f benötigt, damit die Operationen \sup und \inf überhaupt wohldefiniert sind.

Es wird sich herausstellen, dass die Beibehaltung gleichmäßiger Stetigkeit der Supremums- und Infimumsfunktion integral für die Funktionalität der hier beschriebenen Modelltheorie metrischer Strukturen ist.

Satz 2.14. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f_s: M \rightarrow [0, 1]$ für eine Indexmenge S eine gleichmäßig stetige Funktion. Zusätzlich sei Δ ein gemeinsames gleichmäßiges Stetigkeitsmodul für die Funktionenfamilie. Dann sind $\sup_s f_s$ und $\inf_s f_s$ gleichmäßig stetige Funktionen mit Definitionsbereich M und Zielbereich $[0, 1]$. Außerdem ist Δ ein gleichmäßiges Stetigkeitsmodul für beide Funktionen.

Beweis. Wir wollen dies auf 2.13 zurückführen und setzen dazu $M' := S$ und die Metrik auf M' sei die diskrete Metrik. Weiterhin setzen wir $f(x, s) := f_s(x)$ und entnehmen der Voraussetzung, dass Δ dann ein Stetigkeitsmodul für f ist. Die Behauptung folgt nun vollständig aus 2.13. \square

Satz 2.15. Es seien M, M' metrische Räume und f, f_1, f_2, \dots beschränkte reellwertige Funktionen von $M \times M'$. Falls f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, so konvergiert $\sup_y f_n$ auf M gleichmäßig gegen $\sup_y f$ und $\inf_y f_n$ (auf M) gegen $\inf_y f$.

Beweis. Wir geben ein $\varepsilon > 0$ vor. Seien $u, v \in M$. Für beliebige, aber feste, $z \in M'$ gilt dann für große n

$$f_n(u, z) - f(u, z) \leq \varepsilon,$$

aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz, wobei das n unabhängig von den $u \in M, z \in M'$ ist. Eine Supremumsbildung resultiert in

$$\sup_y f_n(u) - \sup_y f(u) \leq \varepsilon$$

und ein Symmetrieargument liefert

$$|\sup_y f_n(u) - \sup_y f(u)| \leq \varepsilon.$$

Wegen der Unabhängigkeit des n von $u \in M$ folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sup_y f_n$ gegen $\sup_y f$.

Der Beweis für $\inf_y f_n$ verläuft völlig analog, sodass wir auf diesen hier verzichten. \square

Wahrscheinlichkeitsräume

In diesem Abschnitt wollen wir Wahrscheinlichkeitsräume als metrische Strukturen identifizieren.

Definition 2.16. *Ein Wahrscheinlichkeitsraum (X, \mathcal{B}, P) ist ein Tripel bestehend aus einer nicht-leeren Menge X , einer σ -Algebra \mathcal{B} auf X und einem auf 1 normierten Maß P .*

Wir konstruieren einen Maßraum, den man als metrischen Raum auffassen kann. Dafür schreiben wir $A \sim B$, wenn $A \Delta B$ eine Nullmenge unter P ist, wobei $A, B \in \mathcal{B}$ und Δ die symmetrische Differenz zweier Mengen bezeichnet. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Die Restklasse von einem $A \in \mathcal{B}$ bezeichnen wir mit $[A]$ und nennen sie **Ereignis**. Die Menge all dieser Äquivalenzklassen notieren wir mit $\hat{\mathcal{B}}$ und nennen sie **Ereignis σ -Algebra**. Wir beachten, dass P als induziertes Maß auf $\hat{\mathcal{B}}$ wohldefiniert ist

Definition 2.17. *Seien nun (X, \mathcal{B}, P) gegeben. Wir setzen*

$$\mathcal{M} := (\hat{\mathcal{B}}, 0, 1, \cdot^c, \cap, \cup, P)$$

*und nennen sie **Wahrscheinlichkeitsstruktur**. Dabei ist die Metrik gegeben durch*

$$d([A], [B]) := P(A \Delta B) \quad \text{man vergleiche mit 2.7}$$

und die anderen Operationen sind die gewöhnlichen induzierten Mengenoperationen auf $\hat{\mathcal{B}}$. Dabei überzeugt man sich schnell, dass die Stetigkeitsmoduli für \cdot^c durch $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon$ und für die Vereinigung und den Schnitt durch $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ gegeben sind.

Die gemäß 2.4 kanonisch definierte Signatur bezeichnen wir mit L_{Prob} .

3. Formeln

Formeln und Interpretationen

In diesem Kapitel definieren wir analog zur diskreten Logik grundlegende Begriffe wie Terme, Formeln und deren Interpretationen in Strukturen.

Definition 3.1. *Sei (M_0, d_0) ein pseudometrischer Raum mit Durchmesser 1 und L eine Signatur.*

- (1) *Eine **L-Prästruktur** \mathcal{M}_0 auf (M_0, d_0) besteht aus:*
 - (i) *einer Funktion $P^{\mathcal{M}_0}: M_0^n \rightarrow [0, 1]$ mit Stetigkeitsmodul Δ_P für jedes n -stellige Prädikatsymbol P in L .*
 - (ii) *einer Funktion $f^{\mathcal{M}_0}: M_0^n \rightarrow M_0$ mit Stetigkeitsmodul Δ_f für jedes n -stellige Funktionssymbol f in L .*

- (iii) ein Element $c^{\mathcal{M}_0}$ für jedes Konstantensymbol c in L .
- (2) Zu einer L -Prästruktur \mathcal{M}_0 auf (M_0, d_0) sei die **Quotienten L -Prästruktur** \mathcal{M} auf dem Quotientenraum (M, d) von (M_0, d_0) definiert durch:
 - (i) die eindeutige Funktion $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}: M^n \rightarrow [0, 1]$ mit $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}(\pi(\underline{x})) := \mathcal{P}^{\mathcal{M}_0}(\underline{x})$ für jedes n -stellige Prädikatsymbol P in L .
 - (ii) die eindeutige Funktion $f^{\mathcal{M}}: M^n \rightarrow M$ mit $f^{\mathcal{M}}(\pi(\underline{x})) := \pi(f^{\mathcal{M}_0}(\underline{x}))$ für jedes n -stellige Funktionssymbol f in L .
 - (iii) für jedes Konstantensymbol c in L sei $c^{\mathcal{M}} := \pi(c^{\mathcal{M}_0})$.
- (3) Die **Vervollständigung** der Quotienten L -Prästruktur \mathcal{M} auf (M, d) sei die folgende L -Struktur \mathcal{N} auf der Vervollständigung (N, d) von (M, d) :
 - (i) Für ein n -stelliges Prädikatsymbol \mathcal{P} in L sei $\mathcal{P}^{\mathcal{N}}: N^n \rightarrow [0, 1]$ die eindeutige stetige Fortsetzung von $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}$.
 - (ii) Für ein n -stelliges Funktionssymbol f in L sei $f^{\mathcal{N}}: N^n \rightarrow N$ die eindeutige stetige Fortsetzung von $f^{\mathcal{M}}$.
 - (iii) Für jedes Konstantensymbol c in L sei $c^{\mathcal{N}} := c^{\mathcal{M}}$.

Die Konstruktionen aus (2) und (3) erhalten den Durchmesser und alle Stetigkeitsmodule.

Ein wichtiger Unterschied zur diskreten Logik ist hier, dass die Stetigkeitsmodule ein fester Bestandteil der Sprache sind.

Definition 3.2. **L -Terme** sind wie folgt rekursiv definiert:

- (1) Variablen und Konstantensymbole sind L -Terme.
- (2) Für ein n -stelliges Funktionssymbol und L -Terme t_1, \dots, t_n ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein L -Term.

Sei t ein Term und $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Tupel aller Variablen, die in t vorkommen, dann sagen wir t ist ein Term in x_1, \dots, x_n bzw. \underline{x} und schreiben $t(x_1, \dots, x_n)$, oder kurz $t(\underline{x})$. Manchmal fassen wir einen Term $t(\underline{x})$ auch als $t(\underline{y})$ auf, wobei \underline{y} ein Tupel ist, das alle x_i enthält.

Definition 3.3. Für einen L -Term $t(x_1, \dots, x_n)$ und eine L -Prästruktur \mathcal{M} definieren wir $t^{\mathcal{M}}: M^n \rightarrow M$ rekursiv:

- (1) Falls $t = c$ gilt für ein Konstantensymbol c , dann setzen wir $t^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := c^{\mathcal{M}}$.
- (2) Falls $t = x_i$ gilt, dann setze wir $t^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := a_i$.
- (3) Falls $t = f(t_1, \dots, t_m)$, dann setzen wir $t^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\underline{a}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\underline{a}))$.

Definition 3.4. **L -Formeln** in einem Variablen Tupel \underline{x} werden analog zu Formeln in normaler Logik definiert:

- (1) Für zwei L -Terme t_1, t_2 in \underline{x} ist $d(t_1, t_2)$ eine L -Formel in \underline{x} .
- (2) Für ein n -stelliges Prädikatsymbol (d wird hierbei wie zweistelliges Prädikatsymbol behandelt) P und L -Terme t_1, \dots, t_n in \underline{x} ist $P(t_1, \dots, t_n)$ eine L -Formel in \underline{x} .
- (3) Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ L -Formeln in \underline{x} , dann ist für eine stetige Funktion $u: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ $u(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine L -Formel in \underline{x} .
- (4) Für eine L -Formel φ in (y, \underline{x}) sind $\sup_y \varphi$ und $\inf_y \varphi$ L -Formeln in \underline{x} .
Formeln die ohne diesen Schritt konstruiert werden heißen **quantorenfrei**.

Eine Formel aus (1) oder (2) heißt **atomar**. Wie in normaler Logik schreiben wir für eine Formel $\varphi(\underline{x})$ für eine L -Formel φ in \underline{x} . Wie bei L -Termen vergrößern wir manchmal das Tupel \underline{x} .

Definition 3.5. Für einen L -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und eine L -Prästruktur \mathcal{M} definieren wir $\varphi^{\mathcal{M}}: M^n \rightarrow [0, 1]$ rekursiv:

- (1) Falls $\varphi = d(t_1, t_2)$ für L -Terme t_1, t_2 in \underline{x} , setzen wir $\varphi^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := d^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\underline{a}), t_2^{\mathcal{M}}(\underline{a}))$.

- (2) Falls $\varphi = P(t_1, \dots, t_m)$ für ein Prädikatsymbol P und L -Terme t_1, \dots, t_m in \underline{x} , setzen wir $\varphi^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := P^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\underline{a}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\underline{a}))$.
- (3) Falls $\varphi = u(\psi_1, \dots, \psi_m)$ für eine stetige Funktion $u: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ und L -Formeln ψ_1, \dots, ψ_m in \underline{x} , setzen wir $\varphi^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := u(\psi_1^{\mathcal{M}}(\underline{a}), \dots, \psi_m^{\mathcal{M}}(\underline{a}))$.
- (4) Falls $\varphi = \inf_y \psi$ oder $\varphi = \sup_y \psi$ gilt für eine L -Formel ψ in (y, \underline{x}) , setzen wir $\varphi^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := \inf\{\psi^{\mathcal{M}}(b, \underline{a}) \mid b \in M\}$, bzw. $\varphi^{\mathcal{M}}(\underline{a}) := \sup\{\psi^{\mathcal{M}}(b, \underline{a}) \mid b \in M\}$.

Satz 3.6. Für jede L -Formel φ und jeden L -Term t existieren Stetigkeitsmodule Δ_φ und Δ_t für $t^{\mathcal{M}}: M^n \rightarrow M$ bzw. $\varphi^{\mathcal{M}}: M \rightarrow [0, 1]$ die von der L -Prästruktur \mathcal{M} nicht abhängen.

Beweis. Folgt per Induktion über den Aufbau des Terms bzw. der Formel. Da die Stetigkeitsmodule Δ_f, Δ_P zu einem Funktionssymbol $f \in L$ und einem Prädikatsymbol $P \in L$ von \mathcal{M} unabhängig sind, folgt die Aussage aus Satz 2.8 für alle Terme und quantorenfreie Formeln. Mit Satz 2.13 folgt die Aussage auch für Formeln mit Quantoren. \square

Satz 3.7. Sei wie in Definition 3.1 \mathcal{M}_0 eine L -Prästruktur, \mathcal{M} die zugehörige Quotienten L -Prästruktur und \mathcal{N} die Vervollständigung von \mathcal{M} . Dann gilt für einen L -Term $t(\underline{x})$, eine L -Formel $\varphi(\underline{x})$, $\underline{a} \in M_0$ und $\underline{a}' \in M \subset N$:

- (1) $t^{\mathcal{M}}(\pi(\underline{a})) = \pi(t^{\mathcal{M}_0}(\underline{a}))$,
- (2) $\varphi^{\mathcal{M}}(\pi(\underline{a})) = \varphi^{\mathcal{M}_0}(\underline{a})$,
- (3) $t^{\mathcal{N}}(\underline{a}') = t^{\mathcal{M}}(\underline{a}')$
- (4) $\varphi^{\mathcal{N}}(\underline{a}') = \varphi^{\mathcal{M}}(\underline{a}')$

Beweis. Folgt per Induktion über den Aufbau des Terms bzw. der Formel. Nach Konstruktion von \mathcal{M} und \mathcal{N} , Definition 3.3 und Definition 3.5 gilt die Aussage für alle Terme und quantorenfreie Formeln. Sei nun $\varphi(\underline{x}) = Q_y \psi(y, \underline{x})$, wobei Q entweder \inf oder \sup ist, und die Aussage gelte bereits für $\psi(y, \underline{x})$. Da π surjektiv ist erhält man

$$\begin{aligned} Q\{\psi^{\mathcal{M}}(b', \pi(\underline{a})) \mid b' \in M\} &= Q\{\psi^{\mathcal{M}}(\pi(b), \pi(\underline{a})) \mid b \in M_0\} \\ &= Q\{\psi^{\mathcal{M}_0}(b, \underline{a}) \mid b \in M_0\} \end{aligned}$$

Da $\psi^{\mathcal{N}}$ stetig ist, $\psi^{\mathcal{N}}|_M = \psi^{\mathcal{M}}$ gilt und M dicht in N liegt, folgt

$$Q\{\psi^{\mathcal{M}}(b', \underline{a}') \mid b' \in M\} = Q\{\psi^{\mathcal{N}}(b', \underline{a}') \mid b' \in N\}.$$

Damit folgt (2) und (4) auch für Formeln mit Quantoren. \square

Definition 3.8. Zwei L -Formeln $\varphi(\underline{x})$ und $\phi(\underline{x})$ heißen **äquivalent**, falls für jede L -Struktur \mathcal{M} und alle Tupel $\underline{a} \in M^n$ $\varphi(\underline{a}) = \phi(\underline{a})$ gilt.

Nun wollen wir auch sagen können was in einer L -Prästruktur wahr ist und was nicht. In stetiger Logik reichen hierfür Formeln. Da unsere Formeln allerdings Werte in $[0, 1]$ annehmen, ist erst mal nicht ganz klar, wann eine Formel wahr sein soll. Deswegen führen einen neuen Begriff ein:

Definition 3.9. Eine **L-Bedingung** E ist ein formaler Ausdruck $\varphi = 0$ für eine L -Formel φ .

- (1) Falls φ keine freien Variablen hat, heißt E **geschlossen**.
- (2) Falls für eine L -Prästruktur \mathcal{M} und $\underline{a} \in M^n$ $\varphi^{\mathcal{M}}(\underline{a}) = 0$ gilt, sagen wir **\mathbf{E} von \underline{a} ist wahr in \mathcal{M}** und schreiben $\mathcal{M} \models E[\underline{a}]$.
- (3) Zwei L -Bedingungen E_1, E_2 heißen **logisch äquivalent**, falls für jede L -Struktur \mathcal{M} und alle Tupel $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\mathcal{M} \models E_1[\underline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models E_2[\underline{a}]$.

- Bemerkung 3.10.** (1) Nach Satz 3.7 kann in Definition 3.8 und in 3.9 (3), das gleiche für alle L -Prästrukturen gefordert werden.
- (2) Die Äquivalenz von zwei L -Formeln $\varphi_1(\underline{x})$, $\varphi_2(\underline{x})$ impliziert die logische Äquivalenz von den L -Bedingungen $E_1 := \varphi_1(\underline{x}) = 0$ und $E_2 := \varphi_2(\underline{x}) = 0$. Die Umkehrung gilt aber nicht, da die logische Äquivalenz von L -Bedingungen nur von den Nullstellen der zugrunde liegenden Formeln auf alle L -Strukturen abhängt. Für $\varphi_1(x, y) := d(x, y)$ und $\varphi_2(x, y) := \min(2d(x, y), 1)$ ist zum Beispiel E_1 zu E_2 logisch äquivalent, aber φ_1 ist nicht äquivalent zu φ_2 .
- (3) Für eine L -Bedingung $E[\underline{x}]$, eine L -Prästruktur \mathcal{M} ist die Menge $\{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models E[\underline{a}]\}$ stets abgeschlossen, da nach Satz 3.6 für jede L -Formel $\varphi(\underline{x})$ die Funktion $\varphi^{\mathcal{M}}$ stetig ist.

Definition 3.11. Seien φ, ϕ zwei L -Formeln und $\dot{\cdot} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $x_1 \dot{\cdot} x_2 := \max(x_1 - x_2, 0)$.

- (1) Wir schreiben $\varphi = \phi$ als Abkürzung für die Bedingung $|\varphi - \phi| = 0$.
- (2) Für $r \in [0, 1]$ schreiben wir $\varphi = r$ für die Bedingung aus (1), wobei $\phi = r$.
- (3) Wir schreiben $\varphi \leq \phi$ und $\phi \geq \varphi$ als Abkürzung für $\varphi \dot{\cdot} \phi = 0$.

Bemerkung 3.12. Sei $E[z, \underline{x}] = (\varphi(z, \underline{x}) = 0)$, $E_1[\underline{x}] = (\varphi_1(\underline{x}) = 0)$ und $E_2[\underline{y}] = (\varphi_2(\underline{y}) = 0)$ für L -Formeln $\varphi(z, \underline{x})$, $\varphi_1(\underline{x})$ und $\varphi_2(\underline{y})$. Dann gilt für eine L -Prästruktur \mathcal{M} und zwei Tupel $\underline{a}, \underline{b}$ aus M :

- (1) $(\mathcal{M} \models E_1[\underline{a}]) \wedge (\mathcal{M} \models E_2[\underline{b}]) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\max(\varphi_1(\underline{a}), \varphi_2(\underline{b})) = 0)$
- (2) $(\mathcal{M} \models E_1[\underline{a}]) \vee (\mathcal{M} \models E_2[\underline{b}]) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\varphi_1(\underline{a}) \cdot \varphi_2(\underline{b}) = 0)$
- (3) $\forall z \in M : (\mathcal{M} \models E[z, \underline{a}]) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\sup_z \varphi(z, \underline{a}) = 0)$
- (4) $\exists z \in M : (\mathcal{M} \models E[z, \underline{a}]) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\inf_z \varphi(z, \underline{a}) = 0)$

Das heißt, wir können L -Bedingungen wie in diskreter Logik mit \wedge und \vee verknüpfen und haben auch ein Analogon zu All- und Existenzquantor. Was im Allgemeinen aber nicht existiert ist die Negation:

Nach Bemerkung 3.10 ist die Menge $A := \{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models E[\underline{a}]\}$ abgeschlossen für eine L -Bedingung $E[\underline{x}]$. Falls nun eine Negation $\hat{E}[\underline{x}]$ von $E[\underline{x}]$ existiert, dann ist $A = B^c$ für $B := \{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \hat{E}[\underline{a}]\}$, also offen. Das heißt, falls wir jede L -Bedingung negieren könnten, dann wäre jede Menge von der gleichen Form wie A sowohl offen als auch abgeschlossen. Das ist aber zum Beispiel für eine L -Struktur mit nicht isolierten Punkten und die L -Bedingung $d(x, y) = 0$ nicht der Fall.

Verknüpfungen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass man eigentlich nur endlich viele Verknüpfungen braucht. Um dies zu zeigen geben wir vier Verknüpfungen an und zeigen, dass man mit den daraus konstruierbaren L -Formeln jede L -Formel beliebig genau approximieren kann. Außerdem zeigen wir, dass eine bestimmte Teilmenge der L -Bedingungen bereits festlegt, welche L -Bedingungen in einer L -Prästruktur für welche Elemente wahr ist.

Definition 3.13. Ein Verknüpfungssystem $\mathcal{F} = (F_n \mid n \geq 1)$ ist eine Familie von Mengen F_n , die aus stetigen Funktionen $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ bestehen.

- (1) Ein Verknüpfungssystem heißt **abgeschlossen**, falls:
- (i) Für jedes n und jedes $j \leq n$ die Projektion $\pi_j^n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ auf die j -te Koordinate in F_n ist.
- (ii) Für alle n, m , $u \in F_n$ und alle $v_1, \dots, v_n \in F_m$ auch $u(v_1, \dots, v_m)$ in F_m ist.

Das kleinste abgeschlossene Verknüpfungssystem $\overline{\mathcal{F}}$, das \mathcal{F} enthält heißt **Abschluss von \mathcal{F}** . Um diesen Abschluss zu konstruieren, definiert man \mathcal{F}_0 als die Vereinigung von \mathcal{F} und den Projektionen aus (i). Dann definiert man

rekursiv \mathcal{F}_{n+1} als \mathcal{F}_n vereinigt mit den fehlenden Funktionen aus (ii). Die Vereinigung aller \mathcal{F}_n ist der Abschluss von \mathcal{F} . Damit sind die Funktionen in $\overline{\mathcal{F}}$ genau die endlichen Verknüpfungen von Funktionen in \mathcal{F} und die Projektionen.

- (2) Wir sagen \mathcal{F} ist **voll**, falls für jede stetige Funktion $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $g \in \overline{\mathcal{F}_n}$ existiert mit $\|f - g\|_\infty < \epsilon$.

Definition 3.14. \mathcal{F} -eingeschränkte L -Formeln seien wie folgt rekursiv definiert.

- (1) Atomare L -Formeln sind \mathcal{F} -eingeschränkt.
- (2) Falls $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ \mathcal{F} -eingeschränkte L -Formeln sind und $u \in \mathcal{F}_n$, dann ist auch $u(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ \mathcal{F} -eingeschränkt.
- (3) Falls φ \mathcal{F} -eingeschränkt ist, ist es auch $\sup_x \varphi$ und $\inf_x \varphi$.

Lemma 3.15. Jede $\overline{\mathcal{F}}$ -eingeschränkte L -Formel ist zu einer \mathcal{F} -eingeschränkten L -Formel äquivalent. Wegen $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ ist jede \mathcal{F} -eingeschränkten L -Formel $\overline{\mathcal{F}}$ -eingeschränkt.

Beweis. Die Aussage lässt sich per Induktion über die Definition von $\overline{\mathcal{F}}$ -eingeschränkte L -Formeln zeigen. Der Induktionsanfang (1) und der Induktionsschritt im Fall (3) sind klar. Nach der expliziten Konstruktion von $\overline{\mathcal{F}}$ ist jedes $u \in \overline{\mathcal{F}_n}$ eine endliche Verknüpfung von Funktionen aus \mathcal{F} oder eine Projektion. Damit ist also für $\overline{\mathcal{F}}$ -eingeschränkte L -Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, die zu \mathcal{F} -eingeschränkten L -Formeln ϕ_1, \dots, ϕ_n äquivalent sind, auch $u(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ zu einer \mathcal{F} -eingeschränkten L -Formel äquivalent. Das folgt entweder aus (2) für \mathcal{F} -eingeschränkte L -Formeln endlich oft angewandt, oder, falls u eine Projektion ist, einfach aus $u(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \equiv \varphi_j \equiv \phi_j$. \square

Satz 3.16. Sei \mathcal{F} ein volles Verknüpfungssystem. Dann existiert für jede L -Formel φ und jedes $\epsilon > 0$ eine \mathcal{F} -beschränkte L -Formel φ_ϵ , so dass für alle L -Prästrukturen \mathcal{M} $\|\varphi^\mathcal{M} - \varphi_\epsilon^\mathcal{M}\|_\infty \leq \epsilon$ gilt.

Beweis. Nach Lemma 3.15 reicht es eine $\overline{\mathcal{F}}$ -beschränkte L -Formel ϕ zu finden. Dies lässt sich per Induktion über den Aufbau der Formel zeigen. Beim Induktionsschritt für L -Formeln der Form $\psi = u(\varphi_1, \dots, \varphi_n) =: u(\underline{\varphi})$ wählen wir ein $u' \in \overline{\mathcal{F}_n}$ mit $\|u - u'\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ und setzen $\delta = \frac{\Delta_u(\frac{\epsilon}{2})}{n}$. Dann ist wegen $d(\underline{\varphi}_\delta, \underline{\varphi}) \leq \Delta_u(\frac{\epsilon}{2})$:

$$\begin{aligned} \|u'(\underline{\varphi}_\delta) - u(\underline{\varphi})\|_\infty &\leq \|u'(\underline{\varphi}_\delta) - u(\underline{\varphi}_\delta)\|_\infty + \|u(\underline{\varphi}_\delta) - u(\underline{\varphi})\|_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Der Induktionsanfang und der Induktionsschritt für Quantoren sind klar. \square

Definition 3.17. Wir definieren \mathcal{F}_0 als das Verknüpfungssystem mit $F_1 := \{0, 1, \frac{x}{2}\}$, $F_2 := \{\dot{\cdot}\}$ und $F_{\geq 2} := \{\emptyset\}$, wobei 0 und 1 konstante Funktionen in einer Variable sind.

Bemerkung 3.18. In $\overline{\mathcal{F}_2}$ von \mathcal{F}_0 liegen folgende Abbildungen:

- (1) $\min(x_1, x_2) = x_1 \dot{\cdot} (x_1 \dot{\cdot} x_2)$
- (2) $\max(x_1, x_2) = 1 \dot{\cdot} \min(1 \dot{\cdot} x_1, 1 \dot{\cdot} x_2)$
- (3) $|x_1 - x_2| = \max(x_1 \dot{\cdot} x_2, x_2 \dot{\cdot} x_1)$
- (4) $\min(x_1 + x_2, 1) = 1 \dot{\cdot} ((1 \dot{\cdot} x_1) \dot{\cdot} x_2)$
- (5) $x_1 \dot{\cdot} (mx_2) = \underbrace{((\dots (x_1 \dot{\cdot} x_2) \dot{\cdot} \dots))}_{m\text{-mal}} \dot{\cdot} x_2$

Insbesondere erhält man durch iterierte Anwendung von (4) auf $2^{-n} = ((\frac{x}{2})^n \circ 1) \in \overline{\mathcal{F}_1}$, dass $A_2 := \{m2^{-n} \in [0, 1] | m, n \in \mathbb{N}_0\}$ in $\overline{\mathcal{F}_1}$ liegt.

Lemma 3.19. *Sei $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion, $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2 \in A_2^n$ und $\epsilon > 0$, dann existiert ein $g \in \overline{F}_n$ mit $|f(\underline{x}_j) - g(\underline{x}_j)| < \epsilon$ für $j = 1, 2$.*

Beweis. Da $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ ist $x_{i,1} \neq x_{i,2}$ für ein i . Wir setzen $\hat{x}_1 := x_{i,1}$ und $\hat{x}_2 := x_{i,2}$ und wählen eine stetige Funktion $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\hat{f}(\hat{x}_1) = f(\underline{x}_1)$ und $\hat{f}(\hat{x}_2) = f(\underline{x}_2)$. Wenn wir nun eine Funktion $\hat{g} \in \overline{F}_1$ finden mit $|\hat{f}(\hat{x}_j) - \hat{g}(\hat{x}_j)| < \epsilon$ für $j = 1, 2$, dann ist $g := \hat{g} \circ \pi_i^n \in \overline{F}_n$ Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. Es reicht die Aussage für $n = 1$ zu zeigen.

Sei nun also $n = 1$ und ohne Einschränkung sei $x_1 < x_2$. Wähle a_j in A_2 mit $|a_j - f(x_j)| < \epsilon$. Falls $a_1 \geq a_2$ wählen wir ein $m \in \mathcal{N}$ mit $a \leq m(x_2 - x_1)$ und definieren $g \in \overline{F}_1$ durch $g(y) := \max(a_1 \div m(y \div x_1), a_2)$. Nach Bemerkung 3.18 liegt g tatsächlich in \overline{F}_1 und es gilt $g(x_1) = a_1$ und $g(x_2) = a_2$. Falls $a_1 < a_2$ gilt, ersetzen wir in g a_j durch $1 \div a_j$. Damit ist dann $1 \div g$ eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Satz 3.20. \mathcal{F}_0 ist voll.

Beweis. Sei $u : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ stetig und $\epsilon > 0$. Für alle $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A_2^n$ wählen wir ein $g_{\underline{x}_1, \underline{x}_2} \in \overline{F}_n$ mit $|u(\underline{x}_j) - g_{\underline{x}_1, \underline{x}_2}(\underline{x}_j)| < \epsilon$. Da A_2^n dicht in $[0, 1]^n$ liegt bildet

$$(\{\underline{y} \in [0, 1]^n \mid g_{\underline{x}_1, \underline{x}_2}(\underline{y}) - u(\underline{y}) < \epsilon\})_{\underline{x}_1 \in A_2^n}$$

eine offene Überdeckung von $[0, 1]^n$ für jedes $\underline{x}_2 \in A_2^n$. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]^n$ kann diese auf eine endliche reduziert werden. Das heißt es gibt $\underline{x}_1^1, \dots, \underline{x}_1^{s_{\underline{x}_2}}$ so dass für $g_{\underline{x}_2} := \min(g_{\underline{x}_1^1, \underline{x}_2}, \dots, g_{\underline{x}_1^{s_{\underline{x}_2}}, \underline{x}_2})$ folgendes gilt:

- (1) $g_{\underline{x}_2} < u + \epsilon$
- (2) $g_{\underline{x}_2} > u - \epsilon$ auf der offenen Menge

$$V_{\underline{x}_2} := \bigcap_{k \leq s_{\underline{x}_2}} \{\underline{y} \in [0, 1]^n \mid g_{\underline{x}_1^k, \underline{x}_2}(\underline{y}) > u(\underline{y}) - \epsilon\}.$$

Wegen $|u(\underline{x}_2) - g_{\underline{x}_1^k, \underline{x}_2}(\underline{x}_2)| < \epsilon$ enthält $V_{\underline{x}_2}$ \underline{x}_2 . Da A_2^n dicht in $[0, 1]^n$ liegt, bilden die $V_{\underline{x}_2}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]^n$. Diese Überdeckung kann auf eine endliche reduziert werden, das heißt es gibt $\underline{x}_2^1, \dots, \underline{x}_2^m$ so dass für $g := \max\{g_{\underline{x}_2^1}, \dots, g_{\underline{x}_2^m}\}$ auch $g > u - \epsilon$ gilt. Da für alle $j = 1, \dots, m$ $g_{\underline{x}_2^j} < u + \epsilon$ gilt, folgt $\|u - g\|_\infty < \epsilon$. Außerdem liegt g in \overline{F}_n , da nach Bemerkung 3.18 endliche Minima und Maxima von Funktionen in \overline{F}_n wieder in \overline{F}_n liegen. \square

Definition 3.21. *Eine L-Formel ist in Pränexform, falls sie die Gestalt $Q_{x_1}^1 \dots Q_{x_n}^n \varphi$ hat für eine quantorenfreie L-Formel φ und für $Q^i = \sup$ oder $Q^i = \inf$.*

Lemma 3.22. *Jede \mathcal{F}_0 -eingeschränkte L-Formel ist äquivalent zu einer \mathcal{F}_0 -eingeschränkten L-Formel in Pränexform.*

Beweis. Folgt per Induktion über den Aufbau der Formel. Der Induktionsanfang und der Quantoren Induktionsschritt sind klar. Der Induktionsschritt für Formeln der Form $\varphi_1 \div \varphi_2$ folgt aus der Monotonie von \div , denn für $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ und $a \in [0, 1]$ gilt

- (1) $(\inf_x f(x) \div a = \inf_x (f(x) \div a))$
- (2) $(\sup_x f(x) \div a = \sup_x (f(x) \div a))$
- (3) $a \div (\inf_x f(x)) = \sup_x (a \div f(x))$
- (4) $a \div (\sup_x f(x)) = \inf_x (a \div f(x)).$

\square

Der Folgende Satz fasst dieses Unterkapitel zusammen:

Satz 3.23. Sei $E[\underline{x}]$ eine L -Bedingung, dann existieren L -Bedingungen $(E_n[\underline{x}])_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Jedes E_j hat die Form $\varphi_j(\underline{x}) = 0$ für eine \mathcal{F}_0 -beschränkte L -Formel $\varphi_j(\underline{x})$ in Pränexform.
- (2) Für jede L -Prästrukturen \mathcal{M} und alle $\underline{a} \in M^n$ gilt

$$\mathcal{M} \models E[\underline{a}] \iff \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\mathcal{M} \models E_n[\underline{a}]).$$

Beweis. Sei $\varphi(\underline{x})$ die L -Formel mit $E[\underline{x}] = \varphi(\underline{x}) = 0$. Wähle eine beliebige Nullfolge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in A_2 . Nach Satz 3.16 existieren nun \mathcal{F}_0 -beschränkte L -Formeln $(\hat{\varphi}_n(\underline{x}))_{n \in \mathbb{N}_0}$, sodass für alle L -Prästrukturen \mathcal{M} $\|\varphi^{\mathcal{M}} - \hat{\varphi}_n^{\mathcal{M}}\|_{\infty} \leq \epsilon_n$ gilt. Das heißt für alle L -Prästrukturen \mathcal{M} und $\underline{a} \in M^n$ gilt:

$$\mathcal{M} \models \underbrace{\varphi(\underline{a}) = 0}_{E[\underline{a}]} \iff \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\mathcal{M} \models \hat{\varphi}_n(\underline{a}) \leq \epsilon_n).$$

Wegen $\epsilon_j \in A_2$ ist $\hat{\varphi}_n(\underline{x}) \dot{-} \epsilon_j$ eine \mathcal{F}_0 -beschränkte L -Formel, also zu einer \mathcal{F}_0 -beschränkten L -Formel $\varphi_j(\underline{x})$ in Pränexform äquivalent. Da $\hat{\varphi}_j(\underline{x}) \leq \epsilon_j$ als $\hat{\varphi}_j(\underline{x}) \dot{-} \epsilon_j = 0$ definiert ist, ist also $\hat{\varphi}_j(\underline{x}) \leq \epsilon_j$ zu $\varphi_j(\underline{x}) = 0$ äquivalent. \square

4. Modelltheoretische Konzepte

In diesem Abschnitt wollen wir für eine feste Signatur L einige der grundlegenden Konzepte der Modelltheorie einführen, welche für diese von zentraler Bedeutung sind.

Definition 4.1. Eine **Theorie** in L ist eine Menge abgeschlossener L -Bedingungen. Des Weiteren sei T eine Theorie in L und \mathcal{M} eine L -Struktur, so sagen wir \mathcal{M} ist ein **Modell** von T und schreiben: $\mathcal{M} \models T$ falls $\mathcal{M} \models E$ für alle E in T .

$\mathbf{Mod}_L(\mathbf{T})$ sei dann definiert als die Menge aller L -Strukturen, welche Modelle von T sind. Ist \mathcal{M} eine L -Struktur, so ist die Theorie von \mathcal{M} die Menge aller abgeschlossener L -Bedingungen, welche in \mathcal{M} gelten, und wir schreiben diese als $\mathbf{Th}(\mathcal{M})$. Eine Theorie welche diese Form hat heißt **vollständig**. Sei T eine L -Theorie und E eine abgeschlossene L -Bedingung, so sagen wir E folgt aus T und schreiben $T \models E$ falls $\mathcal{M} \models E$ für alle Modelle \mathcal{M} von T gilt.

Beispiel 4.2. Sei (X, \mathcal{B}, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Definiere die Äquivalenzrelation für \sim_{μ} mit $A_1, A_2 \in \mathcal{B}, A_1 \sim_{\mu} A_2$ gdw. $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$. Dann ist $\mathcal{M} = (\mathcal{B}', 0, 1, \cdot^c, \cap, \cup)$ wobei \mathcal{B}' die Sammlung aller Äquivalenzklassen von \mathcal{B} ist, eine Wahrscheinlichkeitsstruktur mit Metrik $d([A]_{\mu}, [B]_{\mu}) = \mu(A \Delta B)$, wobei 0 das Ereignis mit Maß 0 ist und analog 1 das Ereignis mit Maß 1 . Diese Strukturen können wir dann wie folgt axiomatisieren:

- (1) Die boolischen Axiome, welche sich auf den stetigen Fall übertragen lassen, so wird z.B. $\forall x \forall y (x \cup y = y \cup x)$ zu $\sup_x \sup_y (d(x \cup y, y \cup x)) = 0$
- (2) Maßaxiome.
 $\mu(0) = 0, \mu(1) = 1$
 $\sup_x \sup_y (\mu(x \cap y) \dot{-} \mu(x)) = 0$
 $\sup_x \sup_y (\mu(x) \dot{-} \mu(x \cup y)) = 0$
 $\sup_x \sup_y |(\mu(x) \dot{-} \mu(x \cap y)) - (\mu(x \cup y) \dot{-} \mu(y))| = 0$
Die drei letzten Axiome drücken aus, dass $\mu(x \cup y) + \mu(x \cap y) = \mu(x) + \mu(y)$ für alle x, y gilt.
- (3) Verbindung zwischen μ und d
 $\sup_x \sup_y |d(x, y) - \mu(x \Delta y)| = 0$

Wie definieren diese Menge an L -Bedingungen als $\text{Prob}A$. Sei nun \mathcal{M} ein Modell mit metrischem Raum (M, d) . Dann ist \mathcal{M} ein Modell von $\text{Prob}A$ gdw. \mathcal{M} die zu einem Wahrscheinlichkeitsraum (X, \mathcal{B}, μ) assoziierte Wahrscheinlichkeitsstruktur im obigen Sinne ist.

Bemerkung 4.3. Beachte, dass wir Modelle nur dann benutzen, falls der zugrundeliegende metrische Raum vollständig ist. Nach 3.7 sei T eine L -Theorie und M_0 eine L -Prästruktur mit $\varphi_{M_0} = 0$ für alle Bedingung $\varphi = 0$ in T , dann ist die Vervollständigung des kanonischen Quotienten von M_0 ein Modell von T

Definition 4.4. Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} L -Strukturen.

- (1) \mathcal{M} und \mathcal{N} heißen **elementar äquivalent** und wir schreiben $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, wenn $\sigma^{\mathcal{M}} = \sigma^{\mathcal{N}}$ für alle L -Formeln σ . Äquivalent dazu ist, dass $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$ ist.
- (2) Sei $M \subseteq N$ dann ist \mathcal{M} eine **elementare Unterstruktur** von \mathcal{N} und schreiben $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, falls für $\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \varphi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$ für alle L -Formel $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ und Elementen a_1, \dots, a_n aus M gilt. Dann heißt \mathcal{N} eine **elementare Erweiterung** von \mathcal{M}
- (3) Sei $M' \subseteq M$, f eine Funktion von M' nach N heißt **elementare Abbildung** von \mathcal{M}' nach \mathcal{N} , falls für jede L -Formel $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ mit a_1, \dots, a_n aus M' gilt: $\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \varphi^{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_n))$
- (4) Eine **elementare Einbettung** ist eine elementare Abbildung von ganz M nach N .

Beispiel 4.5. Sei \mathcal{M}_n der Standard-Maßraum auf $[0, 1]^n$, welcher insb. auch ein W -Raum ist. So definiert die Abbildung $\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}$, $A \mapsto A \times [0, 1]$ eine elementare Einbettung. Denn \mathcal{M}_n hat Quantorenelimination und dann folgt $\varphi^{\mathcal{M}_{n+1}}(a_1, \dots, a_n) = \varphi^{\mathcal{M}_n}(a_1, \dots, a_n) \cdot (1 - 0) = \varphi^{\mathcal{M}_n}(a_1, \dots, a_n)$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}_n$ was aus den Eigenschaften des Lebesgue-Maßes folgt.

Bemerkung 4.6. (1) Jede elementare Abbildung von einer metrischen Struktur in eine andere erhält den Abstand.
(2) Die Menge aller elementare Abbildungen ist abgeschlossen unter Komposition und Bildung von Inversen.
(3) Jeder Isomorphismus zwischen metrischen Strukturen ist eine elementare Einbettung.

Bemerkung 4.7. Eine Menge S von L -Formeln heißt **dicht im Bezug zum logischen Abstand**, falls: Für alle L -Formeln $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Formel $\psi(x_1, \dots, x_n) \in S$ so dass, für alle L -Strukturen \mathcal{M} und alle $a_1, \dots, a_n \in M$

$$|\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) - \psi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)| \leq \varepsilon$$

Satz 4.8. (Tarski-Vaught-Test) Sei S eine dichte Menge von L -Formeln und seinen \mathcal{M}, \mathcal{N} L -Strukturen mit $M \subseteq N$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$
- (2) Für jede L -Formel $\varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ in S mit $a_1, \dots, a_n \in M$ gilt:

$$\inf\{\varphi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, b) | b \in N\} = \inf\{\varphi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, c) | c \in M\}$$

Beweis:

(1) \implies (2) Wenn (1) gilt, so folgt (2) für die Menge aller L -Formeln direkt aus $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, denn für eine L -Formel $\varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ und $a_1, \dots, a_n \in A$ haben wir:

$$\begin{aligned} \inf\{\varphi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, b) | b \in N\} &= (\inf_y \varphi(a_1, \dots, a_n, y))^{\mathcal{N}} = (\inf_y \varphi(a_1, \dots, a_n, y))^{\mathcal{M}} \\ &= \inf\{\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n, c) | c \in M\} = \inf\{\varphi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, c) | c \in M\} \end{aligned}$$

(2) \implies (1) Nehme nun an (2) gilt für eine dichte Menge S in der Menge aller L -Formeln. Als erstes beweisen wir, dass (2) in der Menge aller L -Formeln gilt. Sei dazu $\varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ eine L -Formel und sei $\epsilon > 0$, sei nun $\psi(a_1, \dots, a_n, y)$ ein Element welches von $\varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ im Sinne des logischen Abstandes nur ϵ entfernt ist. Seien $a_1, \dots, a_n \in M$, dann folgt :

$$\begin{aligned} \inf\{\varphi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, b) | b \in M\} &\leq \inf\{\psi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, b) | b \in M\} + \epsilon \\ &= \inf\{\psi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, c) | c \in N\} + \epsilon \leq \inf\{\varphi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, c) | c \in N\} + 2\epsilon \end{aligned}$$

Lasse nun ϵ gegen 0 laufen und beachte, dass $M \subseteq N$ so erhalten wir das gewünschte Resultat für $\varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ Nehme nun an (2) gilt für die Menge aller L -Formeln. So beweise :

$$\psi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \psi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$$

mit Hilfe von Induktion über die Länge von ψ und benutze (2) wenn ψ mit einem inf oder sup beginnt.

5. Ultraprodukte und Kompaktheit

In diesem Abschnitt beweisen wir den aus der Modelltheorie bekannten Kompaktheitssatz für die stetige Logik. Dafür verwenden wir Ultraprodukte von Strukturen und benötigen dafür Ultrafilter.

Ultraprodukte

Definition 5.1. Sei X eine Menge. Man nennt $D \subset \mathcal{P}(X)$ einen **Filter** auf X , falls gilt:

- (F1) $\emptyset \notin D, X \in D,$
- (F2) $F \in D, G \supset F \implies G \in D,$
- (F3) $F_1, F_2 \in D \implies F_1 \cap F_2 \in D.$

Man nennt D einen **Ultrafilter** auf X , falls D ein Filter auf X ist und zusätzlich gilt:

- (UF) Ist E ein Filter auf X mit $D \subset E$, so gilt schon $D = E$.

Bemerkung 5.2. Die Forderung $X \in D$ ist äquivalent zu $D \neq \emptyset$.

Lemma 5.3. Sei D ein Filter auf X . Dann sind äquivalent:

- (1) D ist ein Ultrafilter auf X .
- (2) Für alle $A \subset X$ gilt entweder $A \in D$ oder $X \setminus A \in D$.
- (3) Für alle $A, B \subset X$ gilt: $A \cup B \in D \implies A \in D \vee B \in D$.

Beweis.

(1) \implies (2): Es kann nicht $A \in D$ und $X \setminus A \in D$ gelten, da sonst $\emptyset = A \cap X \setminus A \in D$ wäre.

Angenommen, $A \notin D$. Betrachte $E := \{G \subset X \mid G \supset F \setminus A, F \in D\}$. Für $F \in D$ ist $F \supset F \setminus A$, also $F \in E$, also $D \subset E$. Weiter ist E ein Filter auf X :

- (F1) Aus $\emptyset \in E$ folgt $F \setminus A = \emptyset$ für ein $F \in D$ und damit ist $F \subset A$, also $A \in D$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $A \notin D$.
- (F2) Folgt direkt aus der Konstruktion.
- (F3) Seien $G_1, G_2 \in E$, das heißt es existieren $F_1, F_2 \in D$ mit $G_i \supset F_i \setminus A$. Dann folgt $G_1 \cap G_2 \supset F_1 \setminus A \cap F_2 \setminus A = (F_1 \cap F_2) \setminus A$, also $G_1 \cap G_2 \in E$.

Also ist E ein Filter auf X mit $D \subset E$ und es folgt $D = E$, da D ein Ultrafilter auf X ist.

Analog für $X \setminus A \notin D$.

(2) \implies (3): Angenommen $A \notin D$. Nach Annahme ist dann $X \setminus A \in D$ und damit folgt $B = X \setminus A \cap (A \cup B) \in D$. Analog für $B \notin D$.

(3) \implies (1): Sei E ein Filter auf X mit $D \subset E$. Sei $A \in E$. Dann ist $A \cup X \setminus A = X \in D$, also gilt nach Annahme $A \in D$ oder $X \setminus A \in D$. Wegen

$$X \setminus A \in D \implies X \setminus A \in E \implies \emptyset = A \cap X \setminus A \in E$$

und E ein Filter, folgt $X \setminus A \notin D$, also $A \in D$.

Insgesamt gilt also $E \subset D$ und damit $D = E$. Also ist D ein Ultrafilter auf X . \square

Definition 5.4. Sei X eine Menge und $\emptyset \neq E \subset \mathcal{P}(X)$. Man sagt E hat die **endliche Durchschnittseigenschaft** (**FIP**, „finite intersection property“), wenn für alle endlichen Teilmengen $\{F_1, \dots, F_n\}$ von E , der Schnitt $\bigcap_{i=1}^n F_i$ nicht-leer ist.

Bemerkung 5.5. Hat E die endliche Durchschnittseigenschaft, ist $\emptyset \notin E$.

Lemma 5.6. Sei X eine Menge und $\emptyset \neq E \subset \mathcal{P}(X)$.

(1) Hat E die endliche Durchschnittseigenschaft, so existiert ein Filter D auf X , der E enthält.

(2) Ist E ein Filter auf X , so existiert ein Ultrafilter D auf X , der E enthält.

Insbesondere existiert also zu jeder nicht-leeren Menge von Teilmengen von X mit FIP ein Ultrafilter auf X , der diese Menge enthält.

Beweis.

(1) Setze $D := \{G \in \mathcal{P}(X) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, F_1, \dots, F_n \in E, G \supset F_1 \cap \dots \cap F_n\}$. Dann gilt offensichtlich $E \subset D$ und damit $D \neq \emptyset$.

D ist ein Filter auf X :

(F1) Sei $G \in D$, das heißt es existieren $F_1, \dots, F_n \in E$ mit

$$G \supset F_1 \cap \dots \cap F_n \stackrel{E \text{ hat FIP}}{\neq} \emptyset,$$

also $G \neq \emptyset$.

(F2) Sei $G \in D$ und $H \supset G$. Wegen $G \in D$ existieren $F_1, \dots, F_n \in E$ mit $G \supset F_1 \cap \dots \cap F_n$, also insbesondere $H \supset F_1 \cap \dots \cap F_n$. Damit folgt $H \in D$.

(F3) Seien $G_1, G_2 \in D$, das heißt es existieren $F_1^{(1)}, \dots, F_n^{(1)}, F_1^{(2)}, \dots, F_m^{(2)} \in E$ mit $G_i \supset F_1^{(i)} \cap \dots \cap F_n^{(i)}$. Es folgt

$$G_1 \cap G_2 \supset F_1^{(1)} \cap \dots \cap F_n^{(1)} \cap F_1^{(2)} \cap \dots \cap F_m^{(2)},$$

also $G_1 \cap G_2 \in D$.

(2) Zeige dies mit dem Lemma von Zorn. Betrachte dazu $\mathcal{M} := \{E' \in \mathcal{P}(X) \mid E' \text{ Filter auf } X, E \subset E'\}$ mit der durch \subset induzierten partiellen Ordnung. Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ eine Kette. Dann ist $S := \bigcup_{E' \in \mathcal{K}} E'$ ein Filter, das heißt \mathcal{K} hat eine obere Schranke in \mathcal{M} :

(F1) Jedes $E' \in \mathcal{K}$ ist ein Filter, also gilt $\emptyset \notin E'$ und $X \in E'$.

(F2) Sei $F \in S$ und $G \supset F$. Wegen $F \in S$ existiert ein $E' \in \mathcal{K}$ mit $F \in E'$. Da E' ein Filter ist, folgt $G \in E'$ und damit auch $G \in S$.

(F3) Seien $F_1, F_2 \in S$. Dann existieren $E'_1, E'_2 \in \mathcal{K}$ mit $F_i \in E'_i$. Falls $E_1 \subset E_2$ ist, folgt $F_1 \cap F_2 \in E_2$, da E_2 ein Filter ist und $F_1, F_2 \in E_2$ gilt, und damit folgt $F_1 \cap F_2 \in S$. Analog für $E_2 \subset E_1$.

Nach dem Lemma von Zorn hat \mathcal{M} also ein maximales Element D . Dieses ist nach Konstruktion ein Filter auf X und enthält E .

D ist ein Ultrafilter auf X : Sei E' ein Filter auf X mit $D \subset E'$. Insbesondere ist dann E eine Teilmenge von E' , also $E' \in \mathcal{M}$. Da D ein maximales Element von \mathcal{M} ist, folgt $E \subset D$, also $D = E$. \square

Definition 5.7. Sei X ein topologischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von X , D ein Ultrafilter auf I und $x \in X$. Man sagt \mathbf{x} ist der D -Grenzwert von $(x_i)_{i \in I}$, falls für jede Umgebung U von x die Menge $\{i \in I \mid x_i \in U\}$ in D enthalten ist.

Bemerkung 5.8. X ist ein kompakter Hausdorff-Raum genau dann, wenn für jede Familie von Elementen $(x_i)_{i \in I}$ von X und jeden Ultrafilter D auf I der D -Grenzwert von $(x_i)_{i \in I}$ existiert und eindeutig ist.

Beweis. Im folgenden benötigen wir nur die Richtung „ \implies “ und beschränken den Beweis auf diese Richtung. Sei D ein Ultrafilter auf I und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von X .

Existenz: Angenommen, $(x_i)_{i \in I}$ hat keinen D -Grenzwert in X , das heißt für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U_x von x mit $\{i \in I \mid x_i \in U_x\} \notin D$. Reduziere die offene Überdeckung $\{U_x \mid x \in X\}$ von X auf eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Setze $J_k := \{i \in I \mid x_i \in U_{x_k}\}$ für $k = 1, \dots, n$. Aus $J_1 \cup \dots \cup J_n = I \in D$ und $J_k \notin D$ für alle $k = 1, \dots, n$ erhalte nun mit Lemma 5.3 einen Widerspruch:

$$\begin{aligned} J_1 \cup \dots \cup J_n = I \in D &\implies J_1 \in D \vee J_2 \cup \dots \cup J_n \in D \\ &\xrightarrow{J_1 \notin D} J_2 \in D \vee J_3 \cup \dots \cup J_n \in D \\ &\dots \\ &\xrightarrow{J_{n-1} \notin D} J_n \in D. \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Angenommen, $x \neq y \in X$ sind D -Grenzwerte von $(x_i)_{i \in I}$. Da X hausdorffsch ist, existieren disjunkte, offene Umgebungen U, V von x beziehungsweise y . Es gilt nun

$$\begin{aligned} x \text{ ist } D\text{-Grenzwert von } (x_i)_{i \in I} &\implies \{i \in I \mid x_i \in U\} \in D \\ &\implies \underbrace{\{i \in I \mid x_i \notin U\}}_{\supset \{i \in I \mid x_i \in V\}} = I \setminus \{i \in I \mid x_i \in U\} \notin D \\ &\implies \{i \in I \mid x_i \in V\} \notin D \\ &\implies y \text{ ist } \mathbf{nicht} \text{ } D\text{-Grenzwert von } (x_i)_{i \in I}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. \square

Existiert der D -Grenzwert und ist er eindeutig, so schreiben wir

$$\lim_{i, D} x_i = x.$$

Die folgenden zwei Lemmata benötigen wir später, um Formeln über Ultraprodukte von L -Strukturen besser verstehen zu können:

Lemma 5.9. Seien X, X' topologische Räume und $F : X \rightarrow X'$ stetig. Dann gilt für jede Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen von X und jeden Ultrafilter D auf I

$$\lim_{i, D} x_i = x \implies \lim_{i, D} F(x_i) = F(x).$$

Beweis. Siehe [1] 5.1. \square

Lemma 5.10. Sei X ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall in \mathbb{R} , S eine Menge und sei $(F_i)_{i \in I}$ eine Familie von Funktionen $S \rightarrow X$. Dann gilt für jeden Ultrafilter D auf I

$$\sup_{x \in S} (\lim_{i, D} F_i(x)) \leq \lim_{i, D} (\sup_{x \in S} F_i(x)) \text{ und } \inf_{x \in S} (\lim_{i, D} F_i(x)) \geq \lim_{i, D} (\inf_{x \in S} F_i(x)).$$

Weiter existieren für jedes $\epsilon > 0$ Familien von Elementen $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ in S mit

$$\lim_{i,D} F_i(x_i) + \epsilon \geq \lim_{i,D} (\sup_{x \in S} F_i(x)) \quad \text{und} \quad \lim_{i,D} F_i(y_i) - \epsilon \geq \lim_{i,D} (\inf_{x \in S} F_i(x)).$$

Beweis. Siehe [1] 5.2. □

Ultraprodukte metrischer Räume

Sei im Folgenden I eine beliebige Indexmenge und D ein Ultrafilter auf I .

Lemma 5.11. *Sei $(M_i, d_i)_{i \in I}$ eine Familie beschränkter metrischer Räume mit Durchmesser kleiner gleich K . Dann definiert*

$$d : \left(\prod_{i \in I} M_i \right)^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) = ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \lim_{i,D} d_i(x_i, y_i)$$

eine Pseudometrik auf $\prod_{i \in I} M_i$.

Beweis. d ist wohldefiniert nach Bemerkung 5.8, da $d_i : M_i \rightarrow [0, K]$ für alle $i \in I$ gilt.

Seien $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I}, z = (z_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$. $d(x, x) = 0$: Es gilt

$$\{i \in I \mid \underbrace{d_i(x_i, x_i)}_0 \in U\} = I \in D,$$

also $d(x, x) = \lim_{i,D} d_i(x_i, x_i) = 0$.

$d(x, y) = d(y, x)$: Folgt aus $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i)$ für alle $i \in I$.

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$: Mit Lemma 5.9 folgt, da die Addition auf \mathbb{R} stetig ist,

$$\begin{aligned} \lim_{i,D} (d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)) &= \lim_{i,D} d_i(x_i, y_i) + \lim_{i,D} d_i(y_i, z_i) \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen:

$$\underbrace{\lim_{i,D} (d_i(x_i, z_i))}_{d(x,z)} \leq \lim_{i,D} (d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)).$$

Dies folgt aus der Dreiecksungleichung in dem \mathcal{M}_i und dem folgenden Lemma: □

Lemma 5.12. *Sei $K > 0$ und seien $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in [0, K]^I$. Dann gilt*

$$\forall i \in I : x_i \leq y_i \implies \lim_{i,D} x_i \leq \lim_{i,D} y_i.$$

Beweis. Setze $x := \lim_{i,D} x_i, y := \lim_{i,D} y_i$.

Es gilt $\lim_{i,D} (x_i, y_i) = (x, y)$: Sei U eine Umgebung von (x, y) . Dann existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y) \subset U$. Wegen $x = \lim_{i,D} x_i$ gilt $\{i \in I \mid x_i \in B_\epsilon(x)\} \in D$, wegen $y = \lim_{i,D} y_i$ gilt $\{i \in I \mid y_i \in B_\epsilon(y)\} \in D$. Es folgt also

$$\begin{aligned} \{i \in I \mid (x_i, y_i) \in U\} &\supset \{i \in I \mid (x_i, y_i) \in B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y)\} \\ &= \{i \in I \mid x_i \in B_\epsilon(x)\} \cap \{i \in I \mid y_i \in B_\epsilon(y)\} \in D \end{aligned}$$

und damit $\{i \in I \mid (x_i, y_i) \in U\} \in D$.

Da die Subtraktion stetig ist, folgt aus Lemma 5.9 $\lim_{i,D} (y_i - x_i) = y - x$. Insbesondere ist $\lim_{i,D} (y_i - x_i) \in [0, K]$, da $y_i - x_i \in [0, K]$, also $x \leq y$. □

Auf $\prod_{i \in I} M_i$ definiere eine Relation \sim_D durch: $x \sim_D y \iff d(x, y) = 0$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation. Setze weiter $(\prod_{i \in I} M_i)_D := (\prod_{i \in I} M_i) / \sim_D$. Die Pseudometrik d auf $\prod_{i \in I} M_i$ induziert eine Metrik auf $(\prod_{i \in I} M_i)_D$, die wir im weiteren auch mit d bezeichnen.

Definition 5.13. Den Raum $(\prod_{i \in I} M_i)_D$ mit der induzierten Metrik d nennt man **D -Ultraprodukt** von $(M_i, d_i)_{i \in I}$. Die Äquivalenzklasse von $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ unter \sim_D bezeichnen wir mit $((x_i)_{i \in I})_D$.

Falls $(M_i, d_i) = (M, d)$ für alle $i \in I$ gilt, so nennt man den Raum $(\prod_{i \in I} M_i)_D$ **D -Ultrapotenz** von M und schreibt $(M)_D$.

Lemma 5.14. Sei $(M)_D$ die D -Ultrapotenz eines beschränkten metrischen Raums (M, d) . Dann ist die Abbildung $T : M \rightarrow (M)_D, x \mapsto (x_i)_{i \in I}$ mit $x_i = x$ eine isometrische Einbettung. Man bezeichnet T als **diagonale Einbettung** von M in $(M)_D$.

Beweis. Es gilt für $x, y \in M$

$$d(T(x), T(y)) = \lim_{i, D} \underbrace{d(x, y)}_{d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}} = d(x, y).$$

□

Lemma 5.15. Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist die diagonale Einbettung $T : M \rightarrow (M)_D$ surjektiv. Insbesondere sind in diesem Fall M und $(M)_D$ isometrisch isomorph.

Beweis. Sei $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}^I$ und sei x der D -Grenzwert von $(x_i)_{i \in I}$.

Zu zeigen: $T(x) = ((x_i)_{i \in I})_D$.

Dies ist äquivalent zu $0 = d(T(x), (x_i)_{i \in I}) = \lim_{i, D} d(x, x_i)$ und dies gilt genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\underbrace{\{i \in I \mid d(x, x_i) < \epsilon\}}_{=\{i \in I \mid x_i \in B_\epsilon(x)\}} \in D$$

Wegen $x = \lim_{i, D} x_i$ folgt $\{i \in I \mid x_i \in B_\epsilon(x)\} \in D$ und damit die Behauptung. □

Bemerkung 5.16. $([0, 1])_D$ lässt sich kanonisch mit $[0, 1]$ identifizieren. Das Intervall verhält sich also, in Bezug auf Ultrapotenzen, wie eine endliche Struktur in der klassischen Modelltheorie.

Umgekehrt sind endliche Strukturen der klassischen Modelltheorie betrachtet in der stetigen Logik mit der diskreten Metrik kompakte metrische Räume. Insbesondere erhält man durch Ultrapotenzen keine echten elementaren Erweiterungen.

Lemma 5.17. Sei $(M_i, d_i)_{i \in I}$ eine Familie von vollständigen beschränkten metrischen Räumen mit Durchmesser kleiner gleich K . Dann ist das D -Ultraprodukt $(\prod_{i \in I} M_i)_D$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Siehe [1] 5.3. □

Ultraprodukte von Funktionen

Sei im Folgenden I eine beliebige Indexmenge und D ein Ultrafilter auf I . Seien weiter $(M_i, d_i)_{i \in I}, (M'_i, d'_i)_{i \in I}$ Familien von metrischen Räumen mit Durchmesser kleiner gleich K und $(M, d) = ((\prod_{i \in I} M_i)_D, d), (M', d') = ((\prod_{i \in I} M'_i)_D, d')$ die zugehörigen D -Ultraprodukte.

Definition 5.18. Sei $n \geq 1$ und $f_i : M_i^n \rightarrow M'_i$ Abbildungen für alle $i \in I$. Definiere $(\prod_{i \in I} f_i)_D : M^n \rightarrow M'$ durch: Setze für $(x_i^1)_{i \in I}, \dots, (x_i^n)_{i \in I}$

$$\left(\prod_{i \in I} f_i \right)_D \left(((x_i^1)_{i \in I})_D, \dots, ((x_i^n)_{i \in I})_D \right) := ((f_i(x_i^1, \dots, x_i^n))_{i \in I})_D$$

Lemma 5.19. Sei $n \geq 1$ und $f_i : M_i^n \rightarrow M'_i$ Abbildungen für alle $i \in I$. Sei weiter für jedes $i \in I$ die Abbildung f_i gleichmäßig stetig und nehme weiter an, dass $\Delta :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ ein Stetigkeitsmodul für alle f_i . Dann ist $(\prod_{i \in I} f_i)_D : M^n \rightarrow M'$ gleichmäßig stetig und Δ ist ein Stetigkeitsmodul für die Abbildung.

Beweis. Siehe den „Ultraproducts of functions“ in [1]; der Fall $n > 1$ folgt genauso, da wir als Metrik auf dem Produkt das Maximum der Metriken der Komponenten betrachten. \square

Bemerkung 5.20. Hier zeigt sich, dass es wichtig ist, dass wir gleichmäßig stetige Funktionen betrachten. Sonst kann es passieren, dass das Ultraprodukt der Funktion nicht stetig ist:

Betrachte dazu die Multiplikation $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ auf \mathbb{R} ausgestattet mit der Metrik $d_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+, (x, y) \mapsto \min\{|x - y|, 1\}$. Diese ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Wähle $I = \mathbb{N}$ und sei D ein Ultrafilter auf \mathbb{N} , der alle koendlichen Teilmengen von \mathbb{N} enthält. Ein solcher Ultrafilter existiert, da die Menge der koendlichen Teilmengen von \mathbb{N} FIP hat (siehe Lemma 5.6). Betrachte die Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_i := i$. Setze $a := ((a_i)_i)_D \in (\mathbb{R})_D$. Es gilt

$$\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} m\right)(T(0), a) = ((m(0, a_i))_i)_D = ((0)_i)_D = T(0).$$

Sei $b = ((b_i)_i)_D \in (\mathbb{R})_D$ mit $b \neq T(0)$, das heißt

$$\begin{aligned} d_1(b, T(0)) \neq 0 &\implies \exists \epsilon > 0 : \{i \in \mathbb{N} \mid \underbrace{d_1(b_i, 0)}_{|b_i| < \epsilon} < \epsilon\} \notin D \\ &\implies \epsilon < 1 \wedge \forall 0 < \delta \leq \epsilon : \{i \in \mathbb{N} \mid |b_i| \geq \delta\} \in D \end{aligned}$$

($\epsilon < 1$ gilt, da sonst $\{i \in \mathbb{N} \mid d_1(b_i, 0) < \epsilon\} = \mathbb{N} \in D$ wäre). Weiter existieren für jedes $0 < \delta \leq \epsilon$ Indizes i_1, \dots, i_n mit

$$\{i \in \mathbb{N} \mid |b_i| \geq \delta\} = \{i_1, \dots, i_n\} \dot{\cup} \{i \in I \mid |a_i \cdot b_i| > 1 - \delta\}.$$

Da D alle koendlichen Teilmengen von \mathbb{N} enthält, gilt $\{i_1, \dots, i_n\} \notin D$ und mit Lemma 5.3 folgt $\{i \in I \mid |a_i \cdot b_i| > 1 - \delta\} \in D$. Insgesamt gilt für alle $0 < \delta \leq \epsilon$

$$D \ni \{i \in I \mid |b_i| > 1 - \delta\} = \{i \in I \mid d_1(0, a_i \cdot b_i) \in B_\delta(1)\},$$

also $d_1(T(0), a \cdot b) = 1$. Die induzierte Multiplikation auf $(\mathbb{R})_D$ ist somit nicht stetig.

Ultraprodukte von L-Strukturen

Sei im Folgenden I eine beliebige Indexmenge und D ein Ultrafilter auf I . Sei weiter $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ eine Familie von L -Strukturen und (M_i, d_i) der zugrundeliegende metrische Raum von \mathcal{M}_i für alle $i \in I$. Da eine obere Schranke der Durchmesser der M_i existiert (D_L aus Definition 2.4), können wir das D -Ultraprodukt von $(M_i, d_i)_{i \in I}$ betrachten. Für alle Funktionensymbole f von L haben die Interpretationen $f^{\mathcal{M}_i}$ den gleichen Stetigkeitsmodul Δ_f , also ist das D -Ultraprodukt der Familie der Interpretationen wohldefiniert. Das gleiche gilt für Prädikatensymbol P von L . Insbesondere haben alle Interpretationen $P^{\mathcal{M}_i}$ den Wertebereich $[0, 1]$, also kann der Wertebereich des D -Ultraprodukts nach Lemma 5.15 mit $[0, 1]$ identifiziert werden.

Dies führt zu folgender Definition:

Definition 5.21. Definiere das D -Ultraprodukt der Familie $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ von L -Strukturen die L -Struktur \mathcal{M} , die gegeben ist durch:

- Der zugrundeliegende metrische Raum sei das D -Ultraprodukt der zugrundeliegenden metrischen Räume

$$M = \left(\prod_{i \in I} M_i\right)_D.$$

- Für jedes Prädikatensymbol P von L sei die Interpretation von P in \mathcal{M} gegeben durch

$$P^{\mathcal{M}} = T^{-1}\left(\left(\prod_{i \in I} P^{\mathcal{M}_i}\right)_D\right),$$

wobei $T : [0, 1] \rightarrow ([0, 1])_D$ die Identifikation von $[0, 1]$ mit seinem D -Ultraprodukt ist.

- Für jedes Funktionensymbol f von L sei die Interpretation von f in \mathcal{M} gegeben durch

$$f^{\mathcal{M}} = \left(\prod_{i \in I} f^{\mathcal{M}_i}\right)_D.$$

- Für jedes Konstantensymbol c von L sei die Interpretation von c in \mathcal{M} gegeben durch

$$c^{\mathcal{M}} = \left((c_i^{\mathcal{M}_i})_{i \in I}\right)_D.$$

Falls $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_0$ für alle $i \in I$ gilt, dann nennt man \mathcal{M} D -Ultrapotenz von \mathcal{M}_0 und schreibt $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0)_D$.

Satz 5.22. Sei $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ eine Familie von L -Strukturen, D ein Ultrafilter auf I und \mathcal{M} das D -Ultraprodukt von $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$. Sei $\phi(x_1, \dots, x_n)$ eine L -Formel. Dann gilt für alle $a_k = ((a_i^k)_{i \in I})_D \in \mathcal{M}$, $k = 1, \dots, n$

$$\phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{i, D} \phi^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n).$$

Beweis. Für einen Term $t(x_1, \dots, x_n)$ gilt $t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = ((t^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_{i \in I})_D$: Per Induktion über den Aufbau von t .

$t(x_1, \dots, x_n) = x_j$:

$$t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = a_j = ((a_i^j)_{i \in I})_D = ((t^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_{i \in I})_D.$$

$t(x_1, \dots, x_n) = c$ für ein Konstantensymbol c :

$$t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = c^{\mathcal{M}} = ((c^{\mathcal{M}_i})_{i \in I})_D = ((t^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_{i \in I})_D.$$

$t(x_1, \dots, x_n) = f(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n))$ für f ein n -stelliges Funktionensymbol und t_1, \dots, t_m Terme:

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) &= f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \left(\prod_{i \in I} f^{\mathcal{M}_i}\right)\left(\left((t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_{i \in I}\right)_D, \dots, \left((t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_{i \in I}\right)_D\right) \\ &= \left((f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)))_{i \in I}\right)_D \\ &= \left((t^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_{i \in I}\right)_D. \end{aligned}$$

Zeige nun die Behauptung per Induktion über den Aufbau von ϕ .

$\phi(x_1, \dots, x_n) = d(t_1(x_1, \dots, x_n), t_2(x_1, \dots, x_n))$ für Terme t_1, t_2 :

$$\begin{aligned} \phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) &= d^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n), t_2^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \lim_{i, D} d^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), t_2^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)). \end{aligned}$$

$\phi(x_1, \dots, x_n) = P(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n))$ für P ein Prädikatensymbol und t_1, \dots, t_m Terme: Es gilt

$$\begin{aligned} \phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) &= P^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \\ &= T^{-1}\left(\left((P^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)))_{i \in I}\right)_D\right). \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also

$$\begin{aligned} & ((P^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)))_{i \in I})_D \\ &= T(\underbrace{\lim_{i,D} P^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))}_{=:b}) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=:(b)_{i \in I})_D} \end{aligned}$$

das heißt

$$d((P^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)))_{i \in I}, (b)_{i \in I}) = 0.$$

Dies gilt genau dann, wenn für jede Umgebung U von 0 (in $[0, 1]$) die Menge $\{i \in I \mid d^{\mathcal{M}_i}(P^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)), b) \in U\}$ in D liegt, also wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \{i \in I \mid P^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)) \in B_\epsilon(b)\} \in D$$

für $B_\epsilon(b)$ der offene ϵ -Ball um b . Dies folgt aus

$$b = \lim_{i,D} P^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n), \dots, t_m^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)).$$

$\phi(x_1, \dots, x_n) = u(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_m(x_1, \dots, x_n))$ für $u : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ stetig und ψ_1, \dots, ψ_m L -Formeln: Mit Lemma 5.9 folgt die Behauptung aus

$$\lim_{i,D} (\psi_1^{\mathcal{M}_i}, \dots, \psi_m^{\mathcal{M}_i})(a_i^1, \dots, a_i^n) = \underbrace{(\psi_1^{\mathcal{M}}, \dots, \psi_m^{\mathcal{M}})(a_1, \dots, a_n)}_{=:b}.$$

Sei also U eine Umgebung von $b \in [0, 1]^m$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ mit $(B_\epsilon(b))^m \subset U$ und es gilt

$$\begin{aligned} & \{i \in I \mid (\psi_1^{\mathcal{M}_i}, \dots, \psi_m^{\mathcal{M}_i})(a_i^1, \dots, a_i^n) \in (B_\epsilon(b))^m\} \\ &= \bigcap_{k=1}^m \underbrace{\{i \in I \mid \psi_k(a_i^1, \dots, a_i^n) \in B_\epsilon(b)\}}_{\in D \text{ nach Induktionsvoraussetzung}} \in D. \end{aligned}$$

Wegen $B_\epsilon^m(b) \subset U$ folgt nun die Behauptung.

$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sup_y \psi(y, x_1, \dots, x_n)$ für eine L -Formel ψ : Für $\pi_i : [0, 1]^I \rightarrow [0, 1], (z_j)_{j \in I} \mapsto z_i$ gilt

$$\sup_{y \in M_i} \psi^{\mathcal{M}_i}(y, a_i^1, \dots, a_i^n) = \sup_{y \in M} \psi^{\mathcal{M}_i}(\pi_i(y), a_i^1, \dots, a_i^n).$$

Mit Lemma 5.10 folgt

$$\limsup_{i,D} \sup_{y \in M} \psi^{\mathcal{M}_i}(\pi_i(y), a_i^1, \dots, a_i^n) \geq \sup_{y \in M} \lim_{i,D} \psi^{\mathcal{M}_i}(\pi_i(y), a_i^1, \dots, a_i^n).$$

Es gilt sogar „ \leq “: Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 5.10 existiert $((y_i)_{i \in I})_D \in M$ mit

$$\limsup_{i,D} \sup_{y \in M} \psi^{\mathcal{M}_i}(\pi_i(y), a_i^1, \dots, a_i^n) \leq \lim_{i,D} \psi^{\mathcal{M}_i}(y_i, a_i^1, \dots, a_i^n) + \epsilon.$$

„ \leq “ und damit „ $=$ “ folgt nun mit $\epsilon \rightarrow 0$.

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
\phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) &= \sup_{y \in M} \psi^{\mathcal{M}}(y, a_1, \dots, a_n) \\
&= \sup_{y \in M} \lim_{i, D} (\psi^{\mathcal{M}_i}(\pi_i(y), a_i^1, \dots, a_i^n)) \\
&= \lim_{i, D} \sup_{y \in M} \psi^{\mathcal{M}_i}(\pi_i(y), a_i^1, \dots, a_i^n) \\
&= \lim_{i, D} \sup_{y \in M_i} \psi^{\mathcal{M}_i}(y, a_i^1, \dots, a_i^n) \\
&= \lim_{i, D} \phi^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n).
\end{aligned}$$

Analog folgt die Behauptung für $\phi(x_1, \dots, x_n) = \inf_y \psi(y, x_1, \dots, x_n)$ mit einer L -Formel ψ . \square

Korollar 5.23. *Sei D ein Ultrafilter auf einer beliebigen Indexmenge I , \mathcal{M} eine L -Struktur und $T : M \rightarrow (M)_D$ die diagonale Einbettung. Dann ist T eine elementare Einbettung von \mathcal{M} in $(\mathcal{M})_D$.*

Beweis. Sei $\phi(x_1, \dots, x_n)$ eine L -Formel und seien $a_1, \dots, a_n \in M$. Mit Satz 5.22 folgt

$$\phi^{(\mathcal{M})_D}(T(a_1), \dots, T(a_n)) = \lim_{i, D} \phi^{\mathcal{M}_i}(a_1, \dots, a_n) = \phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n).$$

\square

Korollar 5.24. *Seien \mathcal{M}, \mathcal{N} L -Strukturen mit $(\mathcal{M})_D \cong (\mathcal{N})_D$. Dann gilt $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.*

Beweis. Aus Korollar 5.23 folgt $\phi^{\mathcal{M}} = \phi^{(\mathcal{M})_D}$ und $\phi^{(\mathcal{N})_D} = \phi^{\mathcal{N}}$ und aus $(\mathcal{M})_D \cong (\mathcal{N})_D$ folgt $\phi^{(\mathcal{M})_D} = \phi^{(\mathcal{N})_D}$. \square

Kompaktheitssatz

Satz 5.25. *Sei T eine L -Theorie, \mathcal{C} eine Klasse von L -Strukturen und T endlich erfüllbar in \mathcal{C} , das heißt für jede endliche Teilmenge $\Sigma \subset T$ existiert ein $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{M} \models \Sigma$. Dann existiert ein Ultraprodukt von L -Strukturen aus \mathcal{C} , welches ein Modell von T ist.*

Beweis. Siehe dazu [1] 5.8 mit folgenden Ausführungen:

$\{S(E) \mid E \in T\}$ hat FIP: Seien $E_1, \dots, E_n \in T$. Dann ist $E_i \in \{E_1, \dots, E_n\}$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\{E_1, \dots, E_n\} \in \Lambda$, also $\{E_1, \dots, E_n\} \in S(E_i)$. Damit folgt $\{E_1, \dots, E_n\} \in \bigcap_{i=1}^n S(E_i)$.

$\mathcal{M} \models E$ für alle $E \in T$: Schreibe $E = \phi = 0$ mit ϕ L -Aussage. Nach Lemma 5.22 gilt $\phi^{\mathcal{M}} = \lim_{\lambda, D} \phi^{\mathcal{M}_\lambda}$, also gilt $\mathcal{M} \models E$ genau dann, wenn $\lim_{\lambda, D} \phi^{\mathcal{M}_\lambda} = 0$ gilt. Sei $\epsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\{\lambda \in \Lambda \mid \phi^{\mathcal{M}_\lambda} \in [0, \epsilon]\} &\supset \{\lambda \in \Lambda \mid \phi^{\mathcal{M}_\lambda} = 0\} \\
&= \{\lambda \in \Lambda \mid \mathcal{M}_\lambda \models E\} \\
&\supset S(E) \in D,
\end{aligned}$$

also $\{\lambda \in \Lambda \mid \phi^{\mathcal{M}_\lambda} \in [0, \epsilon]\} \in D$ und damit folgt die Behauptung. \square

Definition 5.26. *Für eine Menge von L -Bedingungen Σ setze*

$$\Sigma^+ := \left\{ \phi \leq \frac{1}{n} \mid \phi = 0 \in \Sigma, n \geq 1 \right\}.$$

Korollar 5.27. *In der Situation von Satz 5.25 ist es ausreichend zu prüfen, ob T^+ in \mathcal{C} endlich erfüllbar ist.*

Beweis. Jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ ist auch ein Modell von T^+ : Sei ϕ eine L -Aussage mit $\mathcal{M} \models \phi = 0$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{M} \models \phi \leq \frac{1}{n} \iff \mathcal{M} \models \phi \div \frac{1}{n} = 0 \iff \mathcal{M} \models \max \left\{ \phi - \frac{1}{n}, 0 \right\} = 0$$

und $\mathcal{M} \models \max \left\{ \phi - \frac{1}{n}, 0 \right\} = 0$ gilt, da $\phi^{\mathcal{M}} - \frac{1}{n} < 0$. Insgesamt gilt also $\mathcal{M} \models T^+$.

Jedes Modell $\mathcal{M} \models T^+$ ist auch ein Modell von T : Sei ϕ eine L -Aussage mit $\mathcal{M} \models \phi \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, $\mathcal{M} \not\models \phi = 0$, das heißt $\phi^{\mathcal{M}} > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi^{\mathcal{M}} - \frac{1}{n} > 0$, also $\mathcal{M} \not\models \max \left\{ \phi - \frac{1}{n}, 0 \right\} = 0$ und dies widerspricht der Annahme.

Die Behauptung folgt nun mit Satz 5.25. \square

Definition 5.28. Sei T eine L -Theorie, $(x_j)_{j \in J}$ eine beliebige Familie von freien Variablen und $\Sigma((x_j)_{j \in J})$ eine Menge von L -Bedingungen. Σ ist **konsistent mit** T , wenn für jede endliche Teilmenge $E(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \subset \Sigma((x_j)_{j \in J})$ ein Modell $\mathcal{M} \models T$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in M$ existieren, sodass für alle Bedingungen $E \in F$ gilt: $\mathcal{M} \models E[a_1, \dots, a_n]$.

Korollar 5.29. Sei T eine L -Theorie, $(x_j)_{j \in J}$ eine beliebige Familie von freien Variablen, $\Sigma((x_j)_{j \in J})$ eine Menge von L -Bedingungen und Σ^+ konsistent mit T . Dann existieren ein Modell $\mathcal{M} \models T$ und Elemente $a_j \in M$ für alle $j \in J$ so, dass für alle L -Bedingungen $E \in \Sigma$ gilt: $\mathcal{M} \models E[(a_j)_{j \in J}]$.

Beweis. Siehe [1] 5.12. \square

Axiomatisierbarkeit von Klassen von Strukturen

Mit Ultraprodukten erhält man weitere Erkenntnisse zu den betrachteten Strukturen. Im Folgenden erhalten wir eine Erkenntnis, die uns hilft zu verstehen, wann wir eine Klasse von Strukturen mit einer Theorie beschreiben können.

Definition 5.30. Sei \mathcal{C} eine Klasse von L -Strukturen. Man nennt \mathcal{C} **axiomatisierbar**, wenn eine Menge T von geschlossenen L -Bedingungen existiert so, dass $\mathcal{C} = \text{Mod}_L(T)$ gilt. In diesem Fall nennt man T eine Menge von **Axiomen** für \mathcal{C} in L .

Satz 5.31. Sei \mathcal{C} eine Klasse von L -Strukturen. Dann sind äquivalent:

- (1) \mathcal{C} ist axiomatisierbar in L .
- (2) \mathcal{C} ist abgeschlossen unter Isomorphismen und Ultraprodukten und das Komplement $\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ } L\text{-Struktur}, \mathcal{M} \notin \mathcal{C}\}$ ist abgeschlossen unter Ultrapotenzien.

Beweis. Siehe [1] 5.14. \square

6. Konstruktion von Modellen

In diesem Abschnitt wollen wir Modelle konstruieren, die möglichst ähnlich zu einem gegebenem sind, aber noch weitere wünschenswerte Eigenschaften besitzen.

Vereinigungen von Ketten

Definition 6.1. Eine Kette von Strukturen $(\mathcal{M}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ heißt eine **elementare Kette**, wenn $\mathcal{M}_\lambda \preceq \mathcal{M}_\eta$ für alle $\lambda < \eta$ gilt.

Satz 6.2. Wenn $(\mathcal{M}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine elementare Kette und $\lambda \in \Lambda$ sind, so ist $\mathcal{M}_\lambda \preceq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$.

Beweis. Wir wenden den Tarski-Vaught-Test (Satz 4.8) an. \square

Beispiel 6.3. Sei \mathcal{M}_n der Standard-Maßraum auf $[0, 1]^n$.

Sei f_n die Abbildung $\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}$, $A \mapsto A \times [0, 1]$. Mit QE aus Satz 16.6 aus [1] folgt, dass f_n elementare Einbettungen sind.

Sei \mathcal{M} die Vereinigung aller \mathcal{M}_n (bzgl. der obigen Einbettungen). Dann hat jedes $A \in \mathcal{M}$ die Form $B \times [0, 1]^\omega$, für ein $B \subset [0, 1]^n$.

In der Vervollständigung liegen aber auch Mengen der Form $\prod_n [0, (\frac{1}{2})^{2^{-n}}]$

Satz von Löwenheim-Skolem

Definition 6.4. Sei X ein topologischer Raum. Die kleinste Kardinalität der dichten Teilmengen von X ist der **Dichtheitscharakter** $\text{density}(X)$ von X .

Satz 6.5. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und nehme an, $\text{card}(L) \leq \kappa$. Sei \mathcal{M} eine L -Struktur und $A \subseteq M$ habe $\text{density}(A) \leq \kappa$. Dann existiert eine Unterstruktur \mathcal{N} von \mathcal{M} sodass:

- (1) $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$
- (2) $A \subseteq N \subseteq M$
- (3) $\text{density}(N) \leq \kappa$

Beweis. Sei A_0 eine dichte Teilmenge von A mit der Kardinalität höchstens κ . Durch passendes Vergrößern von A_0 können wir eine Prästruktur N_0 erhalten, so dass $A_0 \subseteq N_0 \subseteq M$ und $\text{card}(N_0) \leq \kappa$ und die folgende Abgeschlossenheitsbedingung gilt: Zu jeder eingeschränkten L -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ und jeder rationalen Zahl $\epsilon > 0$ mit $\varphi^M(a_1, \dots, a_n, c) \leq \epsilon$, $a_k \in N_0$, $k = 1, \dots, n$ und $c \in M$, gibt es ein $b \in N_0$, so dass $\varphi^M(a_1, \dots, a_n, b) \leq \epsilon$. Die Kardinalität kann eingehalten werden, da L maximal κ -viele eingeschränkte Formeln besitzt.

Sei N der Abschluss von N_0 in M . Durch Betrachten von atomaren Formeln in der obigen Bedingung sieht man, dass es eine Unterstruktur \mathcal{N} von \mathcal{M} gibt, die auf N basiert. Stetigkeit von Formeln und gleichmäßige Dichte von eingeschränkten Formeln zeigen, dass $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ den Tarski-Vaught Test erfüllt und daher $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ gilt. \square

Saturierte Strukturen

Definition 6.6. Seien $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ eine Menge von L -Bedingungen und \mathcal{M} eine L -Struktur. Wir sagen, dass $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ **erfüllbar** in \mathcal{M} ist, wenn es Elemente a_1, \dots, a_n in \mathcal{M} gibt so dass $\mathcal{M} \models \Gamma[a_1, \dots, a_n]$ gilt.

Definition 6.7. Seien \mathcal{M} eine L -Struktur und κ eine unendliche Kardinalzahl. Wir sagen, dass \mathcal{M} **κ -saturiert** ist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle $A \subseteq M$ mit Kardinalität $< \kappa$ und $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ eine Menge von $L(A)$ -Bedingungen gilt, wenn jede endliche Teilmenge von Γ in $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ erfüllbar ist, dann ist bereits die gesamte Menge Γ in $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ erfüllbar.

Satz 6.8. Seien L eine Signatur mit $\text{card}(L) = \omega$ und D ein abzählbar unvollständiger Ultrafilter auf einer Menge Λ . Dann ist, für jede Familie $(\mathcal{M}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ von L -Strukturen, $(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda)_D$ ω_1 -saturiert.

Satz 6.9. Seien \mathcal{M} eine L -Struktur und $E(x_1, \dots, x_m)$ eine L -Bedingung der Form

$$(Q_{y_1}^1 \dots Q_{y_n}^n \varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)) = 0$$

wobei jedes Q^i entweder \inf oder \sup und φ quantorenfrei sind.

Sei $\mathcal{E}(x_1, \dots, x_m)$ die Aussage

$$\tilde{Q}^1 y_1 \dots \tilde{Q}^n y_n (\varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0)$$

wobei die $\tilde{Q}^i y_i$ dann $\exists y_i$ sind, wenn das $Q_{y_i}^i \inf_{y_i}$ ist, und $\forall y_i$, wenn $Q_{y_i}^i \sup_{y_i}$ ist.

Wenn \mathcal{M} ω -saturiert ist, dann gilt für beliebige Elemente a_1, \dots, a_m von M

$\mathcal{M} \models E[a_1, \dots, a_m]$ genau dann, wenn $\mathcal{E}(a_1, \dots, a_m)$ wahr ist in \mathcal{M}

Beweis. Induktion über n : Der Induktionsanfang ($n = 0$) ist klar, da E und \mathcal{E} quantorenfrei sind.

Der Induktionsschritt, um einen Quantor umzuwandeln:

- $(\inf_y \psi(x_1, \dots, x_m, y)) = 0$: Wenn \mathcal{M} ω -saturiert ist, gilt $(\inf_y \psi(x_1, \dots, x_m, y)) = 0$ genau dann, wenn $b \in M$ existiert, so dass $(\inf_y \psi(x_1, \dots, x_m, b)) = 0$ in \mathcal{M} gilt. Die Implikation gilt mit $(\inf_y \psi(x_1, \dots, x_m, b)) \leq \frac{1}{l}$, für $l \geq 1$.
- $(\sup_y \psi(x_1, \dots, x_m, y)) = 0$: Analog zum Fall inf.

□

Beispiel 6.10. In dem folgenden Beispiel sehen wir, dass die Bedingung ω -saturiert zu sein notwendig ist. Sei $\mathcal{M} = \mathbb{N}$ mit der diskreten Metrik und mit einem Prädikat $P(n) = 1/n$. Dann ist \mathcal{M} nicht ω -saturiert und $(\inf_y P(y)) = 0$ ist erfüllt, aber die übersetzte Aussage $\exists y: (P(y) = 0)$ ist falsch.

Definition 6.11. Seien \mathcal{M} eine L -Struktur und \mathcal{N} eine elementare Erweiterung von \mathcal{M} . Wir nennen \mathcal{N} eine **Vergrößerung** von \mathcal{M} , wenn es die folgende Eigenschaft hat: Für beliebige $A \subseteq M$ und $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ eine Menge von $L(A)$ -Bedingungen gilt, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar in $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ ist, dann ist bereits die gesamte Menge Γ in $(\mathcal{N}, a)_{a \in A}$ erfüllbar.

Lemma 6.12. Jede L -Struktur hat eine Vergrößerung.

Beweisskizze. (Vgl. [1] 7.7) Wir können für ein Modell \mathcal{M} eine genügend große Ultrapotenz von \mathcal{M} nehmen, bei der alle endliche Teilmengen auftauchen und \mathcal{M} diagonal einbetten. Von diesen endlichen Teilmengen und den Eigenschaften (Satz 5.22) des Ultraprodukts können wir herleiten, dass die Ultrapotenz eine Vergrößerung ist. □

Satz 6.13. Sei \mathcal{M} eine L -Struktur. Zu jeder unendlichen Kardinalzahl κ hat \mathcal{M} eine κ -saturierte elementare Erweiterung.

Beweis. Sei κ regulär (durch eventuelles Vergrößern, z. B. κ^+). Durch Induktion konstruieren wir eine elementare Kette $(\mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa)$, so dass $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ und für jedes $\alpha < \kappa$ $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ eine Vergrößerung von \mathcal{M}_α ist. Für λ eine Limes-Kardinalzahl, sei \mathcal{M}_λ die Vereinigung der \mathcal{M}_α mit $\alpha < \lambda$.

Sei \mathcal{N} die Vereinigung dieser Kette. Nach Satz 6.2 gilt $\mathcal{M}_\alpha \preceq \mathcal{N}$ für alle $\alpha < \kappa$, also insbesondere auch $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. Wir wollen zeigen, dass \mathcal{N} κ -saturiert ist. Sei A eine Teilmenge von \mathcal{N} mit der Kardinalität $< \kappa$. Da κ regulär ist, existiert $\alpha < \kappa$, so dass A eine Teilmenge von \mathcal{M}_α ist. Da $(\mathcal{N}, a)_{a \in A}$ in $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ gefunden werden können, erfüllen die Elemente von \mathcal{N} die Bedingung aus Definition 6.7. □

Stark homogene Strukturen

Definition 6.14. Seien \mathcal{M} eine L -Struktur und κ eine unendliche Kardinalzahl. Wir nennen \mathcal{M} **stark κ -homogen**, wenn die folgende Aussage gilt: Wann immer $L(C)$ eine Erweiterung von L um Konstanten mit $\text{card}(C) < \kappa$ und f, g Funktionen von C in M sind mit

$$(\mathcal{M}, f(c))_{c \in C} \equiv (\mathcal{M}, g(c))_{c \in C}$$

hat man

$$(\mathcal{M}, f(c))_{c \in C} \cong (\mathcal{M}, g(c))_{c \in C}$$

Bemerke, dass ein Isomorphismus von $(\mathcal{M}, f(c))_{c \in C}$ auf $(\mathcal{M}, g(c))_{c \in C}$ ein Automorphismus von \mathcal{M} ist, der $f(c)$ auf $g(c)$ abbildet für jedes $c \in C$.

Satz 6.15. *Sei \mathcal{M} eine L -Struktur. Zu jeder unendlichen Kardinalzahl κ hat \mathcal{M} eine κ -saturierte elementare Erweiterung \mathcal{N} , so dass jedes Redukt von \mathcal{N} auf eine Untersignatur von L stark κ -homogen ist.*

Beweisskizze. (Vgl. [1] Satz 7.12) (Esei κ regulär. Wir konstruieren \mathcal{N} mit einer elementaren Kette $(\mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \kappa)$. Wir wollen \mathcal{M}_α induktiv definieren: $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{\alpha+1} \succeq \mathcal{M}_\alpha$ so dass $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ τ_α -saturiert ist, für τ_α größer als die Kardinalität der Signatur und größer als die Kardinalität \mathcal{M}_α ist. Für Limes-Kardinalzahlen nehmen wir die Vereinigung. Wie im Beweis von Satz 6.13 ist \mathcal{N} ein κ -saturierte elementare Erweiterung. Für die Homogenität wenden wir folgendes induktiv an: Für zwei Modelle, die genügend saturiert und das eine elementare Erweiterung des anderen ist, kann man elementare Einbettungen finden, die zusätzliche Konstanten berücksichtigen. \square

Monstermodelle

Definition 6.16. *Seien T eine vollständige Theorie über L und κ eine unendliche Kardinalzahl. Ein κ -Monster für T ist ein κ -saturiertes, stark κ -homogenes Modell von T . Wenn \mathcal{U} ein κ -Monster für T und $A \subseteq \mathcal{U}$ sind, nennen wir A klein, wenn $\text{card}(A) < \kappa$ ist.*

Implikationen

In der stetigen Logik können nicht direkt Negationen ausgedrückt werden. Somit wird es schwierig, Implikationen zu formulieren. Mit den folgenden Sätzen sehen wir aber, dass es für die meisten Implikation - insbesondere für ϵ - δ -Kriterien - Möglichkeiten gibt, diese auch in der stetigen Logik zu formulieren.

Im Kapitel zu definierbaren Mengen, werden wir sehen, dass diese immer abgeschlossen sind. Da aber nicht von jeder abgeschlossenen Menge das Komplement auch abgeschlossen ist, können Negationen nicht immer ausgedrückt werden.

Die Beweise zu den folgenden Sätzen sind sehr kurz und im Buch [1] nachzulesen (Sätze 7.14 - 7.17).

Satz 6.17. *Sei \mathcal{M} ein ω -saturiertes Modell von T . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (1) *Für alle $a \in M^n$ gilt, wenn $\varphi^{\mathcal{M}}(a) = 0$ dann $\psi^{\mathcal{M}}(a) = 0$.*
- (2) *$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in M^n (\varphi^{\mathcal{M}}(a) < \delta \implies \psi^{\mathcal{M}}(a) \leq \epsilon)$.*
- (3) *Es gibt eine steigende, stetige Funktion $\alpha: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\alpha(0) = 0$ sodass $\psi^{\mathcal{M}}(a) \leq \alpha(\varphi^{\mathcal{M}}(a))$ für alle $a \in M^n$ gilt.*

Satz 6.18. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- (1) *Für alle $\mathcal{M} \models T$ und alle $a \in M^n$ gilt, wenn $\varphi^{\mathcal{M}}(a) = 0$ dann $\psi^{\mathcal{M}}(a) = 0$.*
- (2) *Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass*

$$T \models \sup_x \min(\delta \dot{-} \varphi(x), \psi(x) \dot{-} \epsilon) = 0$$

- (3) *Es gibt eine ansteigende, stetige Funktion $\alpha: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\alpha(0) = 0$ so dass*

$$T \models \sup_x (\psi(x) \dot{-} \alpha(\varphi(x))) = 0$$

Korollar 6.19. *Sei \mathcal{C} die Menge aller Modelle \mathcal{M} von T , die die Bedingung*

$$\forall a \in M^n [\varphi^{\mathcal{M}}(a) = 0 \implies \psi^{\mathcal{M}}(a) = 0]$$

erfüllen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) *\mathcal{C} ist axiomatisierbar.*

(2) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass die L -Bedingung

$$\sup_x \min(\delta \div \varphi(x), \psi(x) \div \epsilon) = 0$$

wahr ist für alle Elemente von \mathcal{C} .

(3) Es existiert eine ansteigende, stetige Funktion $\alpha: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\alpha(0) = 0$, so dass die L -Bedingung

$$\sup_x (\psi(x) \div \alpha(\varphi(x))) = 0$$

für alle Elemente von \mathcal{C} gilt.

Beweis. Wenn (1) gilt, wende das vorherige Ergebnis auf eine Theorie T' an, die \mathcal{C} axiomatisiert. Wenn (2) oder (3) gelten, kann \mathcal{C} axiomatisiert werden durch Hinzufügen der Bedingungen, die an T gestellt werden. \square

Typen und der Typenraum

In diesem Abschnitt werden wir analog zur nicht-stetigen Logik erster Stufe den Begriff des Typs definieren. Zudem werden wir die Menge aller Typen mit einer Topologie versehen und Stetigkeit bezüglich dieser charakterisieren. In diesem Kapitel sei L eine Signatur und T eine (vollständige) L -Theorie. Weiter sei \mathcal{M} ein Modell von T , $A \subset M$ und T_A die Theorie von \mathcal{M} als $L(A)$ -Struktur.

Definition 6.20. Sei p eine Menge von $L(A)$ -Bedingungen mit freien Variablen x_1, \dots, x_n . Wir nennen p einen (vollständigen) n -Typen über A , falls ein Modell \mathcal{N} von T_A und Elemente $e_1, \dots, e_n \in N$ existieren, sodass p genau die Menge aller L -Bedingungen $E(x_1, \dots, x_n)$ ist, für die $\mathcal{N} \models E[e_1, \dots, e_n]$. Wir schreiben $p = \text{tp}_{\mathcal{N}}(e_1, \dots, e_n)$ und sagen, die e_j realisieren p in \mathcal{N} . Den Raum aller n -Typen über A schreiben wir als $S_n(A)$.

Bemerkung 6.21. Wie auch in nicht-stetiger Logik ist κ -Saturiertheit eines Modells \mathcal{M} dazu äquivalent, dass für alle $A \subset M$ mit $\text{card}(A) < \text{card}(M)$ jeder Typ aus $S_n(A)$ in \mathcal{M} realisiert ist.

Wir werden nun den Raum $S_n(A)$ mit einer Topologie versehen, um Abbildungen $\Phi: S_n(A) \rightarrow [0, 1]$ als stetig bezeichnen zu können.

Definition 6.22. Die **Logik-Topologie** auf $S_n(A)$ ist die Topologie, welche von den folgenden Mengen erzeugt wird: Sei $p \in S_n(A)$ und $(\varphi = 0) \in p$, dann ist für ein $\epsilon > 0$ die Menge $[\varphi < \epsilon] := \{q \in S_n(A) \mid (\varphi = \delta) \in q, \delta < \epsilon\}$ eine offene Umgebung von p .

Satz 6.23. Seien $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $L(A)$ -Formel. Zu jedem $p \in S_n(A)$ existiert nach Definition genau ein $r \in [0, 1]$, sodass $\varphi = r \in p$ gilt. Dann definieren wir die Abbildung $\tilde{\varphi}: S_n(A) \rightarrow [0, 1]$ durch $\tilde{\varphi}(p) := r$. Damit gilt für eine beliebige Abbildung $\Phi: S_n(A) \rightarrow [0, 1]$: Φ ist stetig bezüglich der Logik-Topologie genau dann, wenn eine Folge $(\varphi_k)_k$ von $L(A)$ -Formeln existiert, sodass die Folge $(\tilde{\varphi}_k)_k$ gleichmäßig gegen Φ konvergiert.

Beweis. \Leftarrow : Für $r \in [0, 1], \epsilon > 0$ ist $\tilde{\varphi}^{-1}([r - \epsilon, r + \epsilon]) = [|\varphi - r| < \epsilon]$, also sind die Urbilder einer Basis der Topologie von $[0, 1]$ wieder offen. Damit sind alle $\tilde{\varphi}$ stetig bezüglich der Logik-Topologie. Also ist Φ als Limes von stetigen Funktionen wieder stetig.

\Rightarrow : Die Menge der Funktionen der Form $\tilde{\varphi}$ erfüllt die notwendigen Bedingungen, damit diese Richtung aus dem Satz von Stone-Weierstrass ([2] S.242 Lemma 16.3) folgt. \square

7. Definierbarkeit in stetiger Logik

Eine der wichtigsten Fragestellungen der Modelltheorie ist, welche Objekte sich durch die Symbole aus der Signatur eindeutig charakterisieren lassen. Im folgenden Kapitel werden wir untersuchen, was Definierbarkeit im Kontext stetiger Logik überhaupt sein sollte und welche Eigenschaften definierbare Objekte besitzen. In diesem Kapitel sei \mathcal{M} eine metrische Struktur und L eine Signatur für \mathcal{M} . Weiter sei $A \subset M$ eine Parametermenge.

Definierbarkeit von Prädikaten

Im Kapitel über Verknüpfungen haben wir diese durch Approximation mithilfe eines Teilsystems dargestellt, um die Anzahl der nötigen Verknüpfungen in Formeln zu reduzieren. Damit lassen sich einige Verknüpfungen nicht als eine einzige Formel schreiben, sondern als Grenzwert einer Formelfolge. Bei der Begriffsbildung der Definierbarkeit wollen wir diesen Umstand berücksichtigen.

Definition 7.1. Sei $P : M^n \rightarrow [0, 1]$ ein Prädikat. Wir sagen P ist **definierbar in \mathcal{M} über A** , falls es eine Folge von $L(A)$ -Formeln $(\varphi_k(x))_k$ gibt, sodass $\varphi_k^{\mathcal{M}}(x)$ auf M^n gleichmäßig gegen $P(x)$ konvergiert.

Bemerkung 7.2. In jeder Formel φ_k können nur endlich viele Parameter aus A auftreten, es ist also für definierbare P immer möglich, bereits eine abzählbare Menge A_0 zu finden, sodass P über A_0 definierbar ist. Da jedoch die Definition von P abzählbar viele Formeln enthalten kann, muss diese Menge im Gegensatz zur nicht-stetigen Logik nicht endlich sein.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Definition von Definierbarkeit so ist wie gewünscht, in dem Sinne, dass die Definition das Prädikat eindeutig und unabhängig von der Wahl eines Modells charakterisiert. Genauer wollen wir zeigen:

Satz 7.3. P ist ein definierbares Prädikat in \mathcal{M} , genau dann wenn jede Fortsetzung Q in einer elementare Erweiterung \mathcal{N} invariant unter Automorphismen über der Parametermenge der Definition ist. Dass Q eine Fortsetzung von P ist, meint $(\mathcal{M}, P) \prec (\mathcal{N}, Q)$.

Um dieses Resultat zu beweisen, werden wir Eigenschaften des Typenraumes ausnutzen. Mit dem nächsten Satz stellen wir einen Bezug zwischen definierbaren Prädikaten und stetigen Abbildungen wie in 6.23 her.

Satz 7.4. Sei $P : M^n \rightarrow [0, 1]$ eine Funktion. P ist genau dann ein über A definierbares Prädikat, wenn eine Funktion $\Phi : S_n(A) \rightarrow [0, 1]$ existiert, welche stetig bezüglich der Logik-Topologie ist und für alle $a \in M^n$ gilt $P(a) = \Phi(\text{tp}_{\mathcal{M}}(a))$

Beweis. \Leftarrow : Sei Φ eine Funktion mit $P(a) = \Phi(\text{tp}(a))$, dann existiert nach 6.23 eine Folge von $L(A)$ -Formeln $(\varphi_k)_k$, sodass $\tilde{\varphi}_k$ gleichmäßig gegen Φ konvergiert. Mit $p := \text{tp}(a)$ ist nun $|\varphi_k^{\mathcal{M}}(a) - P(a)| = |\tilde{\varphi}_k(p) - \Phi(p)|$, also konvergiert $(\varphi_k)_k$ gleichmäßig gegen $P(a)$ und somit ist P ein definierbares Prädikat.

\Rightarrow : Sei $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ eine κ -saturierte elementare Erweiterung, wobei $\kappa > \text{card}(A)$. Da P definierbar ist, existiert eine Folge $(\varphi_k)_k$ von $L(A)$ -Formeln, für die $\varphi_k^{\mathcal{M}}$ gegen P konvergiert. Nun ist $\sup_{a \in M^n} \{|\varphi_k^{\mathcal{M}}(a) - \varphi_l^{\mathcal{M}}(a)|\} = \sup_{b \in N^n} \{|\varphi_k^{\mathcal{N}}(b) - \varphi_l^{\mathcal{N}}(b)|\}$ für alle k, l , also konvergieren die $\varphi_k^{\mathcal{N}}$ auf \mathcal{N} gegen ein Prädikat Q . Q ist offensichtlich definierbar und erweitert P . Sei nun $p \in S_n(A)$ ein Typ. Da \mathcal{N} hinreichend saturiert ist, finden wir ein $b \in N^n$, welches p realisiert. Definiere $\Phi(p) := Q(b)$, dies ist wohldefiniert, denn da die φ_k $L(A)$ -Formeln sind, hängt $Q(b)$ nur von $\text{tp}_{\mathcal{N}}(b)$ ab. Außerdem ist Φ der Limes der $\tilde{\varphi}_k$, also ist Φ nach 6.23 stetig bezüglich der Logik-Topologie und es ist für $a \in M^n$ zudem $P(a) = Q(a) = \Phi(\text{tp}(a))$. \square

Beweis. **7.3** \implies : Sei P und eine Folge $(\varphi_k)_k$ von $L(A)$ -Formeln gegeben, für die $\varphi_k^{\mathcal{M}}$ gleichmäßig gegen P konvergiert. Sei nun $(\mathcal{N}, Q) \succ (\mathcal{M}, P)$ eine elementare Erweiterung, dann konvergieren $\varphi_k^{\mathcal{N}}$ also gleichmäßig gegen Q . Da die φ_k $L(A)$ -Formeln sind, sind die $\varphi_k^{\mathcal{N}}$ invariant unter Automorphismen über A , also auch ihr Limes Q .

\Leftarrow : Sei $(\mathcal{N}, Q) \succ (\mathcal{M}, P)$ stark- κ -homogen und κ -saturiert für ein $\kappa > \text{card}(A)$. Wir definieren $\Phi : S_n(A) \rightarrow [0, 1]$ durch $\Phi(p) = Q(b)$, wobei b eine Realisierung von p ist. Dies ist wohldefiniert, denn wegen hinreichender Saturiertheit finden wir für jedes p eine Realisierung und wegen stark- κ -homogen operiert $\text{Aut}_A(\mathcal{N})$ transitiv auf den Realisierungen eines festen Typs und Q war nach Voraussetzung invariant. Sei nun $p \in S_n(A)$ fest und $r := \Phi(p)$. Für jedes $b \in N^n$, das p realisiert, gilt nun $Q(b) = r$. Wegen der Saturiert existiert nun für jedes $\varepsilon > 0$ eine Kondition $\varphi = 0$ in p und $\delta > 0$, sodass $\varphi^{\mathcal{N}}(b) < \delta \implies |Q(b) - r| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $\Phi([\varphi < \delta]) \subset]\varepsilon - r, \varepsilon + r[$. Also ist Φ stetig und nach **7.4** ist P definierbar. \square

Beispiel 7.5. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum als Struktur in der Signatur $L_{\text{Prob}} = \{0, 1, \cdot^C, \cap, \cup, P\}$ (vgl. **2.17**).

- (1) Sei $[A] \in \hat{\mathcal{B}} \setminus \{0\}$, dann ist mit $r := P([A])$ die Abbildung $u : t \mapsto \min\{1, tr^{-1}\}$ eine stetige Selbstabbildung von $[0, 1]$ und damit eine Verknüpfung. Es ist nun $\varphi(X) := u(P(X \cap A))$ eine $L_{\text{Prob}}(\{[A]\})$ -Formel. Also ist ihre Interpretation $\varphi^{\mathcal{M}}(X) = P(X|A)$ ein definierbares Prädikat.
- (2) $P(A|B)$ für beliebige $A, B \in \hat{\mathcal{B}}$ ist kein definierbares zweistelliges Prädikat, falls in $\hat{\mathcal{B}}$ Elemente mit beliebig kleiner, positiver Wahrscheinlichkeit existieren (also die 0 nicht isoliert ist). Wähle in diesem Fall eine Folge $(A_i)_i$ in $\hat{\mathcal{B}}$, welche gegen 0 konvergiert, dann ist $P(0|A_i) \equiv 0, P(A_i|A_i) \equiv 1$, also ist $P(A|B)$ nicht stetig nach $(0, 0)$ fortsetzbar. Also kann es keine Folge von Formeln geben, deren Interpretationen gleichmäßig gegen $P(A|B)$ konvergieren.

Nullmengen

In nicht-stetiger Logik bezeichnen wir eine Menge als definierbar, falls sie aus den Elementen besteht, für die ein definierbares Prädikat wahr ist. Unser erster Versuch, definierbare Mengen zu beschreiben, wird daher Analog dazu sein.

Definition 7.6. Eine Teilmenge $D \subset M^n$ heißt **Nullmenge über A** , falls es ein über A definierbares Prädikat $P(x)$ gibt, sodass $D = \{x \in M^n | P(x) = 0\}$.

Wir können Nullmengen auch anders charakterisieren, nämlich

Lemma 7.7. Für $D \subset M^n$ ist äquivalent:

- (1) D ist eine Nullmenge
- (2) Es gibt eine Folge $(\varphi_m)_m$ von L -Formeln, sodass $D = \{x \in M^n | \forall m : \varphi_m(x) = 0\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \text{Nullmenge von } \varphi_m$

Insbesondere sind Nullmengen unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen.

Beweis. (1 \implies 2): Es gibt ein definierbares Prädikat $P(x)$ und $L(A)$ -Formeln $(\varphi_k(x))_k$ mit

$$D = \{x \in M^n | P(x) = 0\}; \quad \varphi_k(x) \rightarrow P(x)$$

Wir können ohne Einschränkung die Folge $(\varphi_k(x))_k$ so wählen, dass für alle $x \in M^n$ gilt: $|P(x) - \varphi_k^{\mathcal{M}}(x)| < \frac{1}{k}$. Dann ist mit $D_k := \{x \in M^n | \varphi_k(x) \div \frac{1}{k} = 0\}$ also $D = \bigcap_k D_k$

(2 \implies 1): Wenn $(\varphi_m(x))_m$ (2) erfüllen, dann ist mit $P(x) := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \varphi_m^{\mathcal{M}}(x)$ insgesamt $D = \{x \in M^n | P(x) = 0\}$. \square

Beispiel 7.8. Sei $\mathcal{M} = \mathbb{N}$ mit der diskreten Metrik als Struktur in der Signatur, die für jedes Element von \mathbb{N} ein Konstantensymbol enthält. Habe eine elementare Erweiterung $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ und die Folge von Formeln $\varphi_n(x) := \max_{i \leq n} \frac{(1-d(x,i))}{i}$. Diese nimmt für $i = x$ den Wert $\frac{1}{i}$ an und sonst 0. Das Prädikat, welches man als Limes der Folge erhält, hat in \mathcal{N} also die Nullmenge $\mathbb{N} \setminus M$ und die Nullmenge in \mathcal{M} ist leer. Betrachte das Prädikat $\text{dist}(x, D) := \inf_{y \in D} d(x, y)$ mit D der Nullmenge in \mathcal{N} . Dieses kann nicht definierbar sein, denn sonst würde daraus, dass die Menge D nicht-leer ist, bereits folgen, dass auch $D \cap M$ nicht-leer wäre (vgl [1] 9.18).

Abstandsprädikate

Wir sehen, dass sich die Definierbarkeit von Prädikaten beim Quantifizieren über Nullmengen ändern kann. Damit dies nicht der Fall ist, muss insbesondere also das Prädikat $\text{dist}(x, D)$ definierbar sein, da dieses sich durch das Quantifizieren über D bereits mit einer einzelnen Formel ausdrücken lässt. Wir können solche Prädikate axiomatisch beschreiben.

Satz 7.9. Sei F ein Prädikat welches die Folgenden Axiome erfüllt:

$$(E1) \sup_x \inf_y \max\{F(y), |F(x) - d(x, y)|\} = 0$$

$$(E2) \sup_x |F(x) - \inf_y \min\{F(y) + d(x, y), 1\}| = 0$$

Dann nennen wir F ein **Abstandsprädikat** und mit D der Nullmenge von F ist gerade $F(x) = \text{dist}(x, D)$.

Beweis. 9.12 aus [1] □

Definierbarkeit von Mengen

Wir fordern für eine definierbare Menge nun:

Definition 7.10. Eine abgeschlossene Menge $D \subset M^n$ heißt **definierbar** in M über A genau dann, wenn das Abstandsprädikat $\text{dist}(x, D)$ definierbar in M über A ist.

Tatsächlich ist diese Bedingung ausreichend, damit wir über in diesem Sinne definierbare Mengen quantifizieren können, ohne die Definierbarkeit von Prädikaten zu verändern. Dies wird in [1] 9.17 genauer ausgeführt. Wir wollen an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen, sondern noch ein Beispiel für definierbare Mengen geben.

Bemerkung 7.11. In der Definition von definierbaren Mengen wird abgeschlossen gefordert. Dies ist jedoch keine Einschränkung: Angenommen X ist die Nullmenge eines Prädikates P und es gäbe ein x im Abschluss von X . Dann hätte x wegen $P(x) \neq 0$ aber x eine Umgebung auf der $P \neq 0$ wäre, da P stetig ist, also läge x nicht im Abschluss von X .

Beispiel 7.12. Betrachte $\varphi(X)$ aus 7.5(1), sei $D := \{X | \varphi^M = 0\}$ die zugehörige Nullmenge. Im Allgemeinen ist $\varphi^M(X) \neq \text{dist}(X, D)$, denn $0 \in D$ und $\text{dist}(A, D) \leq d(0, A) = P(A)$ und $P(A|A) = 1$, also sind die Werte für $A \neq 1$ verschieden. Jedoch ist D definierbar, denn $\text{dist}(X, D) = P(X \cap A) = P(X|A) \cdot P(A)$. Insbesondere besteht B aus allen Ereignissen, die disjunkt zu A sind (modulo P) und D ist abgeschlossen. Damit folgt, dass die Menge aller Ereignisse, die mit A zusammenfallen können, eine offene Teilmenge der Ereignisalgebra ist, die A enthält.

Definierbarkeit von Funktionen

Abschließend wollen wir noch den Definierbarkeit für Funktionen definieren und eine Aussage über beliebige definierbare Funktionen bemerken, ohne weiter ins Detail zu gehen.

Definition 7.13. Sei M eine L -Struktur und $A \subset M$. Eine Funktion $f : M^n \rightarrow M$ ist **definierbar** genau dann, wenn die Funktion $d(f(x), y)$ auf M^{n+1} ein in M über A definierbares Prädikat ist.

Lemma 7.14. Jede definierbare Funktion $f : M^n \rightarrow M$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis. [1] Prop. 9.23

□

Alphabetischer Index

- D*-Grenzwert, 16
- κ -Monster, 26
- κ -saturiert, 24
- Automorphismus, 3
- Axiom, 23
- axiomatisierbar, 23

- beschränkt, 2

- diagonale Einbettung, 18
- Durchmesser, 2

- Einbettung, 3
- elementare Kette, 23
- endliche
 - Durchschnittseigenschaft, 15
- Ereignis, 6
- Ereignis-Algebra, 6
- erfüllbar, 24

- Filter, 14

- Funktion, 2
- Gleichmäßige
 - Konvergenz, 4
- Gleichmäßiges
 - Stetigkeitsmodul, 2

- Infimumsabbildung, 5
- Isomorphismus, 3

- konsistent, 23
- Konstante, 2

- Metrische Struktur, 2
- metrischer Raum, 2
- Modell, 12

- Prädikat, 2
- Produktmetrik, 3
- Pseudometrischer
 - Raum, 3

- Quotientenraum, 4

- Signatur, 3

- stark κ -homogen, 25
- Stelligkeit, 2
- Supremumsabbildung, 5

- Theorie, 12

- Ultrafilter, 14
- Ultrapotenz,
 - metrische Räume, 18,
 - L*-Strukturen, 20
- Ultraprodukt,
 - metrische Räume, 18,
 - L*-Strukturen, 19
- Unterstruktur, 3

- Vergrößerung, 25
- vollständig, 2

- Wahrscheinlichkeitsraum, 6
- Wahrscheinlichkeitsstruktur, 6

Literatur

- [1] Yaacov, I., Berenstein, A., Henson, C., & Usvyatsov, A. (2008). Model theory for metric structures. In Z. Chatzidakis, D. Macpherson, A. Pillay, & A. Wilkie (Eds.), Model Theory with Applications to Algebra and Analysis (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 315-427). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511735219.011
- [2] L. Gillman, M. Jerison: Rings of Continuous Functions Springer, New York, NY 1960, doi:10.1007/978-1-4615-7819-2