Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 3.1, 3.2 und 3.3 bis
Mittwoch, den 02.11.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` ;

verwenden Sie insbesondere das dort bereitgestellte Deckblatt.

Aufgabe 3.1 (6 Punkte)

Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\mathcal{P}(X) \to \operatorname{Abb}(X, \{0,1\}), \quad A \mapsto \iota_A,$$

wobei

$$\iota_A \colon X \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A, \\ 1 & \text{falls } x \in A \end{cases}$$

die Indikatorfunktion von $A \subseteq X$ bezeichnet, liefert eine Bijektion von der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ auf die Menge $\operatorname{Abb}(X, \{0,1\})$ aller Abbildungen von X nach $\{0,1\}$.

Bemerkung. Mittels dieser Bijektion können Sie die Mengenoperationen $\cup$ und $\cap$ neu interpretieren; dazu werden auf der Bildmenge $\{0,1\}$ die Addition und Multiplikation „modulo 2" verwendet. Wie gewinnt man $\iota_{A\cup B}$ bzw. $\iota_{A\cap B}$ aus ι_A und ι_B, für $A, B \in \mathcal{P}(X)$?

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Für eine Menge A betrachten wir $\operatorname{Sym}(A) = \{\alpha \mid \alpha \colon A \to A \text{ bijektiv}\} \subseteq \operatorname{Abb}(A, A)$.

(a) Geben Sie die Elemente von $\operatorname{Abb}(A, A)$ für A gleich $\{1\}$ bzw. $\{1,2\}$ sowie die Elemente von $\operatorname{Sym}(A)$ für A gleich $\{1\}$, $\{1,2\}$ bzw. $\{1,2,3\}$ explizit über Abbildungstafeln an.

(b) Zeigen Sie: Sind $\alpha, \beta \in \operatorname{Sym}(A)$, so liegt auch das Kompositum $\alpha\beta$ („erst α, dann β") in $\operatorname{Sym}(A)$. (Sie erhalten also eine Art „Multiplikation" auf der Menge $\operatorname{Sym}(A)$.)

(c) Finden Sie für $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ Elemente $\alpha, \beta \in \operatorname{Sym}(A)$ mit $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

Bemerkung. Bijektionen von einer Menge A auf sich heißen *Permutationen* von A. Die Bezeichnung $\operatorname{Sym}(A)$ steht für *symmetrische Gruppe*.

Aufgabe 3.3 (6 Punkte)

Seien X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Die *symmetrische Differenz* von $A, B \subseteq X$ ist die Menge $A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$. Zeigen Sie für $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$:

(i) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,

(ii) $A \triangle B = B \triangle A$,

(iii) $A \triangle \varnothing = A$,

(iv) $A \triangle A = \varnothing$.

Hinweis. Eine Möglichkeit, die Aufgabe anzugehen, ist eine systematische Fallunterscheidung (z.B. über eine Wahrheitstafel). Sie können, wenn Sie möchten, auch die Bijektion aus Aufgabe 3.1 inklusive der Bemerkung verwenden.