1	2	3	4	B[1]		Σ
				(a)		
				(b)		

..... Name und Matr-Nr. (a)

..... Name und Matr-Nr. (b)

Lineare Algebra I – Blatt 13

(letztes Blatt)

Abgabe am 1.3.2017 in der Vorlesung

..... Gruppe ..... Zusammengearbeitet mit

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Drei der folgenden Aussagen sind äquivalent; welche? Begründen Sie, warum diese Aussagen äquivalent sind (Sie dürfen Resultate aus der Vorlesung verwenden), und zeigen Sie anhand von Beispielen, dass die anderen beiden Aussagen nicht äquivalent zu den dreien sind.

(a) Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A.

(b) A hat n verschiedene Eigenwerte.

(c) Es gibt invertierbare Matrizen S und T, so dass SAT eine Diagonalmatrix ist.

(d) Es gibt eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = S^{-1}DS$ ist.

(e) Es gibt eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}A^TS$ eine Diagonalmatrix ist. (Zur Erinnerung: A^T ist die zu A transponierte Matrix.)

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$. Welche der Matrizen sind diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Geben Sie ein Beispiel für Matrizen A und B in $\mathbb{R}^{n\times n}$ an, für die die binomische Formel $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ nicht gilt (wobei „C^2“ $C \cdot C$ bedeutet). Wie muss die rechte Seite der Formel geändert werden, damit sie korrekt wird?

Aufgabe 4 (1+2+2+1 Punkte):

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt so dass $A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ Faktoren}} = 0$ ist.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix an, die nilpotent ist aber selbst nicht 0 ist.

(b) Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so ist 0 der einzige Eigenwert von A.
Hinweis: Zwei Dinge sind zu zeigen: (1) 0 ist ein Eigenwert, und (2) es gibt keine anderen Eigenwerte.
Zu (1): Können nilpotente Matrizen invertierbar sein? Und was kann man über Eigenwerte von nicht-invertierbaren Matrizen sagen?
Zu (2): Wenn v ein Eigenvektor zu einem Eigenwert $\neq 0$ wäre, was wäre dann A^kv?

(c) Zeigen Sie: Ist $A \in K^{n\times n}$ nilpotent, so ist $I_n - A$ invertierbar, und $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ falls $A^k = 0$.

(d) Prüfen Sie die Formel aus (c) an Ihrem Beispiel aus (a).

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.