

Lineare Algebra I – Blatt 14

Optionale Abgabe von Lösungen bis Mittwoch, den 22.07.2026, 10.30 Uhr in den Kästen.
Abgaben werden korrigiert, und es können so noch Bonuspunkte erzielt werden.

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_SS26/ .

Aufgabe 14.1 (+4 Punkte)

Bestimmen Sie mittels Laplace-Entwicklung die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{F}_{13}),$$

wobei $\mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ den Körper mit 13 Elementen bezeichne. Entscheiden Sie anschließend jeweils, ob die Matrix über dem angegebenen Grundkörper invertierbar ist.

Aufgabe 14.2 (+4 Punkte)

Seien $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Funktionen, und für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & f(t) & 1 \\ g(t) & t^2 - 4 & g(t)h(t) \\ 1 & 0 & h(t) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Entscheiden Sie, für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Matrix A_t invertierbar ist.
- (b) Berechnen Sie, in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$, die komplementäre Matrix $\tilde{A}_t$ zu A_t .
- (c) Bestimmen Sie, für alle gemäß (a) zulässigen Parameter $t \in \mathbb{R}$, die inverse Matrix A_t^{-1} .

Technischer Hinweis. Diese erste Seite ist das angekündigte Bonusblatt zu der Veranstaltung. Durch die Bearbeitung der Aufgaben auf diesem Blatt können zusätzliche Punkte erworben werden. Die Meßlatte für die Prüfungszulassung ist davon unberührt und beträgt wie auf dem vorherigen Blatt vermerkt 200 Gesamtpunkte.

Vielen Dank für Ihr Engagement im Rahmen dieser Veranstaltung!



Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei den anstehenden Prüfungen
und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit.

Bitte wenden!

Die nachfolgenden Aufgaben brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um ein zusätzliches Übungsangebot, um Inhalte der Vorlesung zu vertiefen. Einige dieser Themen werden erst noch in der Vorlesung behandelt.

Aufgabe 14.3

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{Q}).$$

und $\alpha: \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4, v \mapsto vA$, die durch Multiplikation mit A definierte lineare Abbildung.

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von α bzw. A , und lesen Sie die Eigenwerte von α ab. Was können Sie daraufhin über die Diagonalisierbarkeit von A aussagen?
- Berechnen Sie die Eigenräume von α . Was können Sie nun über die Diagonalisierbarkeit von A aussagen?
- Geben Sie, wenn möglich, eine Transformationsmatrix $T \in \text{GL}_4(\mathbb{Q})$ an, die A diagonalisiert; d. h., $T^{-1}AT$ soll eine Diagonalmatrix werden.

Aufgabe 14.4

Sei $V = \mathbb{F}_5^3$ der 3-dimensionale Standardvektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_5$ mit fünf Elementen, und $\mathfrak{E}$ die zugehörige Standardbasis. Sei $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{F}_5}(V)$ mit Koordinatenmatrix

$$[\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{F}_5).$$

- Berechnen Sie alle Eigenwerte von α und Basen für die zugehörigen Eigenräume.
- Ist α diagonalisierbar? Geben Sie, wenn möglich eine Basis $\mathfrak{F}$ für V an, so daß die Koordinatenmatrix $[\alpha]_{\mathfrak{F}}$ diagonal ist.

Aufgabe 14.5

Sei K ein Körper. Zeigen oder widerlegen Sie, jeweils mit geeigneter Begründung:

- Eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, deren einziger Eigenwert 0 ist, ist bereits die Nullabbildung.
- Ein Endomorphismus $\varphi: V \rightarrow V$ eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V ist surjektiv genau dann, wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.
- Sind $\varphi, \psi: V \rightarrow V$ Endomorphismen eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V , und ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $\varphi\psi: V \rightarrow V$, so ist λ auch ein Eigenwert von $\psi\varphi: V \rightarrow V$.

Aufgabe 14.6

Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und euklidischer Norm $\|\cdot\|$.

- Zeigen Sie, daß für $v, w \in V$ die folgenden Gleichungen, der „Satz von Pythagoras“ und die „Parallelogrammgleichung“, gelten:

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle \quad \text{und} \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

- Beschreiben Sie in Worten, welche geometrische Interpretation die beiden Gleichungen in (a) für den Standardraum $\mathbb{R}^2$, also in der euklidischen Ebene, haben.

Aufgabe 14.7

Bestimmen Sie mithilfe des Gram–Schmidt-Verfahrens für die Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (-1, 4, 4, -1), \quad v_3 = (4, -2, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$$

eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ im Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^4$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie zudem eine Basis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ zu U in V .

Aufgabe 14.8

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\alpha: V \rightarrow V$ ein orthogonaler Endomorphismus.

- (a) Zeigen Sie: Der Endomorphismus α besitzt höchstens die Eigenwerte $1, -1$ in $\mathbb{R}$.
- (b) Zeigen Sie: Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von α , so bildet α den Untervektorraum $\langle v \rangle^\perp$ in sich ab, d.h., für $w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ gilt stets $\langle v, w\alpha \rangle = 0$.
- (c) Zeigen Sie: Zerfällt das charakteristische Polynom $f = \text{Charpol}(\alpha)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, so existiert eine Orthonormalbasis für V , die aus Eigenvektoren von α besteht.
Hinweis. Argumentieren Sie per Induktion nach $\dim V$ und verwenden Sie (b).
- (d) Formulieren Sie das Ergebnis aus (c) als eine Aussage über Matrizen, indem Sie geeignet zu Koordinatenmatrizen übergehen.
- (e) Geben Sie eine geometrische Beschreibung aller orthogonalen Endomorphismen des Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt, deren charakteristisches Polynom über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt. Benennen Sie explizit wenigstens einen orthogonalen Endomorphismus, der nicht von dieser Form ist.