

Lineare Algebra I – Blatt 13

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 13.1 und 13.2, sowie 13.3 und 13.4 für Bonuspunkte bis Mittwoch, den 15.07.2026, 10.30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_SS26/.

Aufgabe 13.1

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_4(\mathbb{Q})$, die wie folgt konkret gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A)$, indem Sie A geeignet als Produkt von Elementar- und Diagonalmatrizen schreiben und dann über diese Zerlegung die Determinante berechnen.

(b) Bestimmen Sie $\det(A)$ unabhängig von (a) mit Hilfe der Leibniz-Formel. Fertigen Sie dazu zunächst eine Tabelle an, in der alle Permutationen $\sigma \in \text{Sym}(4)$ mit ihrem Signum aufgeführt sind, die einen von Null verschiedenen Beitrag $\prod_{i=1}^4 a_{i,\sigma(i)}$ liefern.

Aufgabe 13.2

(4 Punkte)

Sei $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v \mapsto vA$ die lineare Abbildung mit der Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie das Polynom

$$f = \det(X \cdot \text{Id}_3 - A) = \begin{vmatrix} X-4 & 2 & 6 \\ 1 & X-1 & 6 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}[X],$$

und zerlegen Sie es in $\mathbb{R}[X]$ als Produkt $f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$ von Linearfaktoren.

(b) Bestimmen Sie, zu $i \in \{1, 2, 3\}$ und den in (a) gefundenen Parameter λ_i , jeweils einen Vektor $v_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $v_i \alpha = v_i A = \lambda_i v_i$.

(c) Prüfen Sie: Die in (b) gefundenen Vektoren bilden eine Basis $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, v_3)$ für $\mathbb{R}^3$.

(d) Berechnen Sie die Koordinatenmatrix $[\alpha]_{\mathfrak{B}}$, bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ aus (c), sowie die Basiswechselmatrix $T = [\text{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathfrak{E}, \mathfrak{B}} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$, so dass insgesamt gilt:

$$[\alpha]_{\mathfrak{B}} = T^{-1}AT.$$

Bemerkung. Das Polynom $f = \det(X \cdot \text{Id} - A)$ ist das sogenannte *charakteristische Polynom* des Endomorphismus α ; im allgemeinen zerfällt es über $\mathbb{R}$ nicht unbedingt in Linearfaktoren. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 werden *Eigenvektoren* von α zu den *Eigenwerten* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genannt. Existiert eine Basis $\mathfrak{B}$ bestehend aus Eigenvektoren, so hat die zugehörige Koordinatenmatrix $[\alpha]_{\mathfrak{B}}$ Diagonalgestalt, und α heißt *diagonalisierbar*.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.3

(+4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $B \in \text{Mat}_m(K)$, $C \in \text{Mat}_{m,n}(K)$, $D \in \text{Mat}_n(K)$ für einen Körper K . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = (\det B)(\det D),$$

wobei auf der linken Seite die Determinante der als „Blockmatrix“ geschriebenen quadratischen Matrix mit $m + n$ Zeilen und Spalten über K gemeint ist.

Tipp: Verwenden Sie die Leibniz-Formel und überlegen Sie sich, welche Summanden überhaupt einen von Null verschiedenen Beitrag liefern können.

Bei der nächsten Aufgabe handelt es sich im wesentlichen um eine Klausuraufgabe aus dem SoSe 2022. Sie können bis zu 4 Punkte für die Bearbeitung der Aufgabenteile (a)–(d) erwerben.

Aufgabe 13.4

(+4 Punkte)

Sei $\alpha: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ der lineare Endomorphismus des Standardvektorraums $\mathbb{Q}^3$ mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

bzgl. der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$, bestehend aus $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

(a) Verifizieren Sie mittels geeigneter Zeilenumformungen, dass A (und damit α) den vollen Rang 3 hat, und berechnen Sie dabei parallel $A^{-1} = [\alpha^{-1}]_{\mathfrak{E}}$.

(b) Bestimmen Sie den Untervektorraum

$$U = \{v \in \mathbb{Q}^3 \mid v\alpha = 5v\},$$

indem Sie eine Basis für U berechnen.

(c) Verifizieren Sie, dass die Abbildung $\beta: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$, $v \mapsto (v\alpha)\alpha + v$ linear ist und geben Sie die zugehörige Koordinatenmatrix $B = [\beta]_{\mathfrak{E}}$ an.

(d) Geben Sie $W = \text{Kern}(\beta)$, den Kern der linearen Abbildung β aus (c), an, indem Sie eine Basis für W bestimmen.

Die verbleibenden Aufgabenteile (e) und (f) brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um ein zusätzliches Übungsangebot, um Inhalte der Vorlesung zu vertiefen.

(e) Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ sich als direkte Summe $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$ zerlegt, wobei U wie in (b) und W wie in (d) gegeben sind.

(f) Gemäß (e) ergänzen sich die von Ihnen gefundenen Basen für U und W zu einer Basis für $\mathbb{Q}^3$. Geben Sie diese Basis noch einmal explizit als geordnete Basis $\mathfrak{B}$ an und berechnen Sie $A' = [\alpha]_{\mathfrak{B}}$ sowie $S \in \text{GL}_3(\mathbb{Q})$ mit $S^{-1}AS = A'$.

Technischer Hinweis. Dies ist das letzte Übungsblatt zu der Veranstaltung. Sie erhalten nächste Woche ein weiteres Übungsblatt 14, welches wie gewohnt korrigiert wird und von Ihnen abgeholt werden kann (siehe Webseite); eine Besprechung des Blattes 14 in den Übungsgruppen ist zeitlich nicht mehr möglich. Durch die Bearbeitung der Aufgaben auf Blatt 14 können ggf. noch zusätzliche Punkte erworben werden. Die Meßlatte 40% bzw. 32% für die Prüfungszulassung bezieht sich auf die Gesamtpunktzahl von 200 Punkten.