

Lineare Algebra I – Blatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 11.1, 11.2, 11.3 und 11.4 bis
Mittwoch, den 01.07.2026, 10.30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_SS26/ .

Für die Bearbeitung der Aufgaben 11.2 und 11.3 wird die folgende Begriffsbildung benötigt. Ist K ein Körper und $\vartheta: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen V mit Basis $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_m)$ und W mit Basis $\mathfrak{C} = (w_1, \dots, w_n)$, so ist die *Koordinatenmatrix* von ϑ bzgl. dieser beiden Basen die Koordinatenmatrix des Vektorsystems $(v_1\vartheta, \dots, v_m\vartheta)$ bzgl. der Basis $\mathfrak{C}$, d. h. diejenige $m \times n$ -Matrix

$$[\vartheta]_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}} = (t_{ij})_{i,j}$$

deren Einträge $t_{ij} \in K$ durch die folgenden Gleichungen eindeutig bestimmt sind:

$$v_i\vartheta = t_{i1}w_1 + t_{i2}w_2 + \dots + t_{in}w_n \quad \text{für } 1 \leq i \leq m.$$

Aufgabe 11.1

(4 Punkte)

Seien $\varphi: U \rightarrow V$ und $\psi: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen U, V, W über einem Körper K . Zeigen Sie:

- (a) Die Hintereinanderausführung $\varphi\psi: U \rightarrow W$ ist eine lineare Abbildung.
- (b) Der Kern $\text{Kern}(\psi) = \{v \in V \mid v\psi = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V , und das Bild $\text{Bild}(\psi) = \{v\psi \mid v \in V\}$ ist ein Untervektorraum von W .
- (c) Aus $V = \langle S \rangle$ für eine Menge $S \subseteq V$ folgt $\text{Bild}(\psi) = \langle \{s\psi \mid s \in S\} \rangle$, und es gilt $\dim \text{Bild}(\psi) \leq \dim V$.

Aufgabe 11.2

(4 Punkte)

(a) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

- (i) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + z, y + 1)$ zwischen den $\mathbb{R}$ -Vektorräumen $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$;
- (ii) $\varphi: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, (x, y) \mapsto (y^2, x)$ von dem $\mathbb{Q}$ -Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ in sich;
- (iii) $\varphi: \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}, (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (a_{2i})_{i \in \mathbb{N}}$ von dem Folgenraum $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ über $\mathbb{F}_2$ in sich.

(b) Geben Sie die Koordinatenmatrix $T = [\vartheta]_{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}}$ für die lineare Abbildung

$$\vartheta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, x, z + x)$$

bezüglich der Standardbasen $\mathfrak{C}$ für $\mathbb{R}^4$ und $\mathfrak{B}$ für $\mathbb{R}^3$ an.

Bestimmen Sie $\text{Kern}(\vartheta)$ und $\text{Bild}(\vartheta)$, indem Sie jeweils eine Basis berechnen.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3

(4 Punkte)

Betrachte die reellen Vektorräume $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasen $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ bzw. $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Weiter seien $\mathfrak{B} = (v_1, v_2)$ und $\mathfrak{C} = (w_1, w_2, w_3)$ für

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 - e_2, & v_2 &= -2e_1 + e_2, \\ w_1 &= f_1 - f_3, & w_2 &= f_2 + f_3, & w_3 &= f_3. \end{aligned}$$

- (a) Überprüfen Sie, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ alternative Basen für V und W bilden.
 (b) Sei $\vartheta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ mit $v_1\vartheta = w_1$ und $v_2\vartheta = w_2$. Bestimmen Sie $[\vartheta]_{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}}$ und $[\vartheta]_{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}}$, die Koordinatenmatrizen von ϑ bzgl. der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bzw. bzgl. der Basen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$.
 (c) Finden Sie eine lineare Abbildung $\psi: W \rightarrow V$ mit $\vartheta\psi = \text{id}_V$ und geben Sie die entsprechenden Koordinatenmatrizen $[\psi]_{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}}$ und $[\psi]_{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}}$ an.

Aufgabe 11.4

(4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und $V = K^n$ der Standardvektorraum über einem Körper K , ausgestattet mit der sogenannten Standardbilinearform

$$\cdot : K^n \times K^n \rightarrow K, \quad (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Sei U ein Untervektorraum von V , und sei

$$U^\perp =_{\text{def}} \{w \in V \mid \forall u \in U : u \cdot w = 0\}.$$

- (a) Zeigen Sie: $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V .
 (b) Der Untervektorraum U sei k -dimensional, mit einer Basis, die bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, \dots, e_n)$ von V als Vektorsystem die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{k,n}(K)$$

mit gewissen Einträgen $a_{ij} \in K$ habe. Zeigen Sie: Dann hat $U^\perp$ die Dimension $n - k$ und besitzt genau eine Basis, die als Vektorsystem die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} -a_{1,k+1} & -a_{2,k+1} & \cdots & -a_{k,k+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{1,k+2} & -a_{2,k+2} & \cdots & -a_{k,k+2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \cdots & -a_{k,n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n-k,n}(K)$$

bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{E}$ hat.

Anleitung. Überprüfen Sie zunächst, dass $U^\perp$ einen Untervektorraum von V bildet. Weisen Sie sodann nach, daß die angegebenen Zeilenvektoren jedenfalls in $U^\perp$ liegen, und erklären Sie anschließend, wieso sie bereits eine Basis für $U^\perp$ bilden.