Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M. Sc.
Sommersemester 2026

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Lineare Algebra I – Blatt 1

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 1.1, 1.2, 1.3 und 1.4 bis Mittwoch, den 22.04.2026, 10.30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_SS26/` ;

verwenden Sie insbesondere den vorgeschriebenen Dokumentenkopf.

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Wie in der zweiten Vorlesung gezeigt, gilt: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen und begründen Sie entsprechende „geschlossene Formeln“ für

(i) die Summe $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen,

(ii) die Summe $2 + 4 + \ldots + 2n$ der ersten n geraden natürlichen Zahlen.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Derzeit gilt weiterhin als ungelöst die Frage, ob es unendlich viele „Primzahlzwillinge“ gibt, also unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß sowohl $p_1 = m$ als auch $p_2 = m+2$ Primzahlen sind.
Bestimmen Sie alle „Primzahldrillinge“, also alle $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß $p_1 = m$, $p_2 = m + 2$ und $p_3 = m + 4$ allesamt Primzahlen sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

Wie in der Vorlesung besprochen, besagt das Extensionalitätsaxiom: Zwei Mengen A und B sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente besitzen, also:

$$A = B \quad \leftrightarrow_{\text{axiom.}} \quad \text{für jede Menge } x \text{ gilt: } x \in A \text{ dann und nur dann, wenn } x \in B.$$

Die Vereinigung und der Schnitt zweier Mengen A, B sind definiert als

$$A \cup B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}, \quad A \cap B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Untenstehend finden Sie grundlegende Regeln, die für beliebige Mengen A, B, C gelten. Verifizieren Sie in jedem der drei Unterpunkte jeweils eine der beiden Regeln.

(i) $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$,

(ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ und $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Bemerkung. Diese Regeln heißen Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze für die Mengenoperationen $\cup$, $\cap$. Welche Assoziationen erweckt dies und was verwundert Sie?

Bitte wenden!

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)

Seien A, B, C Mengen.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \cup B = A \cap B$ ist.

(b) Belegen Sie durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels: Im allgemeinen ist nicht zu erwarten, daß $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ gilt.

Die weiteren Aufgaben sind als Anregungen für das Tutorium bzw. die Übungsstunden gedacht; Sie brauchen für diese *keine* Lösungen abgeben, können sich ggf. aber schon mit ihnen vertraut machen.

Aufgabe 1.5

Wie in der Vorlesung bezeichne $\mathcal{P}(A) = \{T \mid T \subseteq A\}$ die Potenzmenge einer Menge A.

(a) Bestimmen Sie explizit $\mathcal{P}(\{1, \{1\}\})$ sowie die iterierte Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

(b) Überprüfen Sie für jede der beiden folgenden Aussagen jeweils, ob bzw. unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen diese für zwei Mengen A, B gilt, und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Aufgabe 1.6

Überprüfen Sie für jede der beiden folgenden Aussagen jeweils, ob diese für beliebige Mengen A, B, C, D gilt, und begründen Sie Ihre Antwort:

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D) \quad \text{bzw.} \quad (A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (C \times D).$$

Aufgabe 1.7

Bestimmen Sie alle rationalen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 &\quad (1)\\ 2x - y + 4z &= 2 &\quad (2)\\ 4x + 3y - 2z &= 14, &\quad (3) \end{aligned}$$

d. h., geben Sie, ggf. durch eine geeignete Parametrisierung, die Menge aller rationalen Zahlentripel $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ an, für die die drei angegebenen Gleichungen simultan gelten.

Aufgabe 1.8

Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= e &\quad (*)\\ cx + dy &= f, &\quad (**) \end{aligned}$$

falls $\delta(a, b, c, d) = ad - bc \neq 0$, genau eine Lösung hat, indem Sie diese eindeutig bestimmen.