

Kurzversion zweite Klausur Lineare Algebra I

Sommersemester 2026

21.09.2026

Nachname:

Vorname:

Matrikelnr:

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Neben Schreibgerät ist als zusätzliches Hilfsmittel nur erlaubt: ein eigenständig handschriftlich angefertigtes A4-Blatt (beidseitig, mit Namen versehen).
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen beliebig viele der umseitigen vier Aufgaben bearbeiten.
- Bearbeiten Sie Aufgaben jeweils direkt unterhalb des Aufgabentextes und auf den nachfolgenden Leerseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Leerblätter. Beschriften Sie diese jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der relevanten Aufgabennummer. Lassen Sie hinreichend freien Rand für die anschließende Korrektur.
- Geben Sie am Ende das Aufgabenheft und ggf. zusätzliche Lösungsblätter nach Aufgabenreihenfolge geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
max. Punkte	25	25	25	25	100
Punkte					

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Hinweis. Die vier folgenden Aufgabenteile (a)–(d) sind thematisch unabhängig von einander.

- (a) Verifizieren Sie mittels geeigneter elementarer Zeilenumformungen, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 28 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{Q})$$

vollen Rang hat. Gehen Sie dabei kleinschrittig vor und dokumentieren Sie die Art der jeweils durchgeführten Umformung.

Bestimmen Sie, durch Rückverfolgung Ihrer Rechenschritte, eine Darstellung von A als ein Produkt von Elementarmatrizen und Diagonalmatrizen.

Berechnen Sie, beispielsweise über die bereits gefundene Produktdarstellung, die Determinante von A .

- (b) Betrachten Sie den Polynomring $\mathbb{F}_2[X]$ über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen. Bekanntlich ist jedes Polynom vom Grad 1 irreduzibel. Bilden Sie geeignet Produkte, um anschließend eine vollständige Liste aller irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $\text{grad}(f) \in \{2, 3\}$ zu bestimmen.

- (c) Benennen Sie ein praktisches Kriterium, mit dessen Hilfe zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ entschieden werden kann, ob ein gegebenes Element $a + n\mathbb{Z}$ in dem Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ invertierbar bzw. ein Nullteiler ist.

Die Primfaktorzerlegung von 1001 ist $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Verwenden Sie das Kriterium nun konkret für $n = 1001$, um für $a \in \{176, 499\}$ jeweils festzustellen, ob $\bar{a} = a + 1001\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}$ invertierbar ist oder nicht.

Bestimmen Sie in denjenigen der zwei Fälle, in denen $\bar{a}$ invertierbar ist, mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus jeweils das zugehörige multiplikativ inverse Element $\bar{b} \in \mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}$, mit $1 \leq b \leq 1000$, welches also $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ erfüllt.

- (d) Sei K ein Körper, und seien U, V, W endlich dimensionale Untervektorräume eines beliebigen K -Vektorraums. Beweisen Sie durch zweimalige Anwendung einer Ihnen bekannten Dimensionsformel:

$$\dim(U + V + W) = \dim(U) + \dim(V) + \dim(W) - \dim(U \cap V) - \dim((U + V) \cap W).$$

Folgern und begründen Sie die nachstehende Formel:

$$\begin{aligned} \dim(U + V + W) &= \dim(U) + \dim(V) + \dim(W) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(\dim(U \cap V) + \dim(U \cap W) + \dim(V \cap W) + \dim(U \cap (V + W)) \right. \\ &\quad \left. + \dim(V \cap (U + W)) + \dim(W \cap (U + V)) \right) \end{aligned}$$

Punkte. 8+5+8+4

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ein Körper mit 5 Elementen, und $t \in \mathbb{F}_5$ ein Parameter. Sei $\alpha: \mathbb{F}_5^4 \rightarrow \mathbb{F}_5^4$ der lineare Endomorphismus des Standardvektorraums $\mathbb{F}_5^4$ mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+t & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{F}_5)$$

bzgl. der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, bestehend aus $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\dots$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$; es gelte also $e_1\alpha = 3e_1 + 4e_2 + (1+t)e_3 + 3e_4$ usw.

- (a) Bestimmen Sie $\det(A)$ und verifizieren Sie so, dass A (und damit auch α) den vollen Rang 4 hat, unabhängig von t . Berechnen Sie zudem $A^{-1} = [\alpha^{-1}]_{\mathfrak{E}}$, in Abhängigkeit von dem Parameter t .

Hinweis: Es bietet sich an, die Matrix A als Blockmatrix zu lesen.

- (b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $f = \text{Charpol}(\alpha) \in \mathbb{F}_5[X]$, ggf. in Abhängigkeit von t .

Bestimmen Sie die Eigenwerte von α sowie deren algebraische Vielfachheiten, ggf. in Abhängigkeit von t .

- (c) Berechnen Sie zu den gefundenen Eigenwerten jeweils den Eigenraum von α , indem Sie eine geeignete Basis für diesen bestimmen, ggf. in Abhängigkeit von t .

Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von α an, ggf. in Abhängigkeit von t .

- (d) Entscheiden Sie, für welche Parameterwerte t der Endomorphismus α diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

Punkte. 9+5+9+2

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Betrachten Sie $V = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ in der üblichen Weise als $\mathbb{R}$ -Algebra, insbesondere als reellen Vektorraum.

Weiter sei $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, und $\text{Id}_n \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ bezeichne die Einheitsmatrix.

- (a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\mu_B: V \rightarrow V, \quad A \mapsto AB$$

ist linear.

Bestimmen Sie, speziell für $n = 2$ und für eine Basis $\mathfrak{B}$ Ihrer Wahl, die Koordinatenmatrix $[\mu_B]_{\mathfrak{B}} \in \text{Mat}_4(\mathbb{R})$ und folgern Sie $\det(\mu_B) = \det(B)^2$.

- (b) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

$$\begin{aligned} \delta: V &\rightarrow V, & A &\mapsto \det(A) \text{Id}_n, \\ \sigma_B: V &\rightarrow V, & A &\mapsto AB - BA, \\ \vartheta_B: V &\rightarrow V, & A &\mapsto BAB - ABA. \end{aligned}$$

- (c) Bestimmen Sie jeweils die Determinante der in (b) aufgeführten Abbildungen – also δ , σ_B , ϑ_B –, sofern sich diese als linear erwiesen haben.
- (d) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\eta: V \rightarrow V, \quad A \mapsto A + A^{\text{tr}},$$

indem Sie jeweils eine passende Basis ermitteln und ihr Ergebnis verifizieren; dabei bietet es sich ggf. an, eine geeignete Dimensionsformel zu verwenden.

- (e) Bestimmen Sie die Eigenwerte des in (d) aufgeführten Endomorphismus η , inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

Punkte. 6+6+3+6+4

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Betrachten Sie, als Untervektorraum des Polynomrings $\mathbb{R}[X]$, den reellen Vektorraum

$$V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad}(f) \leq 2\}.$$

Weiter lässt sich leicht nachweisen, dass die durch

$$\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) \quad \text{für } f, g \in V.$$

erklärte Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear ist.

- (a) Benennen und überprüfen Sie die fehlenden beiden Eigenschaften, um zu nachzuweisen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V definiert und somit V zu einem euklidischen Vektorraum macht.
- (b) Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf V bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Berechnen Sie explizit

$$\|X + 1\| \quad \text{und} \quad \|X^2 - X\|.$$

Bestimmen Sie zudem den euklidischen Abstand zwischen den Vektoren $X + 1$ und $X^2 - X$ des euklidischen Vektorraums V .

- (c) Wenden Sie das Gram–Schmidtsche Verfahren an, um ausgehend von der geordneten Basis $\mathfrak{B} = (1, X, X^2)$ eine Orthonormalbasis $\mathfrak{D} = (v_1, v_2, v_3)$ für den euklidischen Vektorraum V zu bestimmen.
- (d) Geben Sie eine Basis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ des Untervektorraums

$$U = \langle 1, X \rangle \leq V$$

an, zerlegen Sie den Vektor $X^2 + X \in V$ als Summe

$$X^2 + X = u + w \quad \text{mit } u \in U \text{ und } w \in U^\perp$$

und bestimmen Sie $\|w\|$, den euklidischen Abstand von $X^2 + X$ zu der Ebene U .

- (e) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $[\alpha]_{\mathfrak{D}}$ der linearen Abbildung

$$\alpha: V \rightarrow V, \quad f \mapsto f(-X)$$

bezüglich der Ihnen aus Teil (c) bereits bekannten Basis $\mathfrak{D}$.

Entscheiden Sie zudem, mit Begründung, ob α orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

Punkte. 5+4+8+4+4