

Kurzversion erste Klausur Lineare Algebra I

Sommersemester 2026

30.07.2026

Nachname:

Vorname:

Matrikelnr:

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Neben Schreibgerät ist als zusätzliches Hilfsmittel nur erlaubt: ein eigenständig handschriftlich angefertigtes A4-Blatt (beidseitig, mit Namen versehen).
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen beliebig viele der umseitigen vier Aufgaben bearbeiten.
- Bearbeiten Sie Aufgaben jeweils direkt unterhalb des Aufgabentextes und auf den nachfolgenden Leerseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Leerblätter. Beschriften Sie diese jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der relevanten Aufgabennummer. Lassen Sie hinreichend freien Rand für die anschließende Korrektur.
- Geben Sie am Ende das Aufgabenheft und ggf. zusätzliche Lösungsblätter nach Aufgabenreihenfolge geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
max. Punkte	25	25	25	25	100
Punkte					

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Hinweis. Die vier folgenden Aufgabenteile (a)–(d) sind thematisch unabhängig von einander.

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{Q}^3$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcl} 5x & + & y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & + & 10y & + & 6z & = & 4, \\ 3x & - & y & - & 3z & = & 4 \end{array}$$

in der Form $L = \emptyset$ bzw. $L = \{v + u \mid u \in L_0\}$, indem Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ aufstellen, diese auf Zeilenstufenform bringen und alsdann, sofern vorhanden, eine spezielle Lösung $v \in \mathbb{Q}^3$ und eine geeignete Basis für den Lösungsraum $L_0 \subseteq \mathbb{Q}^3$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems angeben.

Gehen Sie dabei kleinschrittig vor und dokumentieren Sie die Art der jeweils durchgeführten elementaren Zeilenumformung.

- (b) Geben Sie die vollständigen Verknüpfungstabellen für die Addition und die Multiplikation in dem Körper $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ mit drei Elementen an (ohne Begründung).
- (c) Bestimmen Sie in $\mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $f = \text{ggT}(g, h)$ der Polynome

$$g = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \quad \text{und} \quad h = X^3 + X^2 + X + 1.$$

Bestimmen Sie anschließend Polynome $s, t \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f = sg + th$, gemäß des erweiterten Euklidischen Algorithmus.

Dokumentieren Sie Ihre Rechnungen in nachvollziehbarer Weise!

- (d) Sei K ein Körper, und seien U, W_1, W_2 Untervektorräume eines K -Vektorraums V mit $W_1 \subseteq W_2$. Beweisen Sie:

$$W_1 + (U \cap W_2) = (W_1 + U) \cap W_2.$$

Punkte. 9+4+6+6

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K .

- (a) Ein Endomorphismus $\alpha \in \text{End}_K(V)$ habe die Eigenschaft $\alpha^2 = \alpha$.

Zeigen Sie: Für $U = \text{Kern}(\alpha)$ und $W = \text{Bild}(\alpha)$ gelten $U \cap W = \{0\}$ sowie $\alpha|_W = \text{id}_W$, d. h. $w\alpha = w$ für alle $w \in W$.

Folgern Sie unter Verwendung geeigneter Dimensionsformeln: $V = U \oplus W$.

- (b) Sei nun konkret $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^5$ der Standardvektorraum, ausgestattet mit der Standardbasis $\mathfrak{E}$. Bestimmen Sie für $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

explizit Basen für die drei Räume $U = \text{Kern}(\alpha)$, $W = \text{Bild}(\alpha)$ und $U \cap W$.

Verwenden Sie anschließend die Aussage aus (a), um (ohne weitere Rechnungen!) zu entscheiden, ob in diesem konkreten Fall $\alpha^2 = \alpha$ gilt, oder nicht.

- (c) Bestimmen Sie durch wiederholte Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes das charakteristische Polynom $f = \text{Charpol}(A)$ der unter (*) angegebenen Matrix $A \in \text{Mat}_5(\mathbb{R})$.

Bestimmen Sie daraufhin die Eigenwerte von A inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Belegen Sie insbesondere Ihre Angaben zu den Vielfachheiten jeweils durch eine passende kurze Rechnung oder Beobachtung.

Punkte. 6+10+9

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Betrachten Sie $V = \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ in der üblichen Weise als $\mathbb{R}$ -Algebra, insbesondere als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sei

$$U = \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{u} = \mathbf{0}\} \subseteq V \quad \text{für} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V.$$

- (a) Weisen Sie mit Hilfe des Untervektorraumkriteriums nach, dass U einen Untervektorraum von V bildet.
- (b) Bestimmen Sie explizit eine Basis $\mathfrak{B}$ für U und ermitteln Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.
- (c) Zeigen Sie, dass über das Transponieren ein linearer Automorphismus

$$\alpha: U \rightarrow U, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}^{\text{tr}} \tag{†}$$

gegeben ist.

- (d) Berechnen Sie explizit die Koordinatenmatrix $A = [\alpha]_{\mathfrak{B}}$ der linearen Abbildung $\alpha: U \rightarrow U$ in (†) bezüglich einer Basis $\mathfrak{B}$ ihrer Wahl, z. B. derjenigen, die Sie bereits in (b) bestimmt haben.
- (e) Entscheiden Sie, mit Begründung, ob die von Ihnen in (d) berechnete Koordinatenmatrix A diagonalisierbar ist.
- (f) Bestimmen Sie einen zu U komplementären Untervektorraum W von V , für den gilt: $\mathbf{w}^{\text{tr}} \in W$ für alle $w \in W$. Geben Sie dazu direkt eine Basis für den Kandidaten W an und überprüfen Sie anschließend die geforderten Eigenschaften.

Punkte. 5+5+3+4+4+4

Aufgabe 4 (25 Punkte)

- (a) Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Geben Sie die Definition der zugehörigen euklidischen Norm $\|\cdot\|$ sowie die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung für V an. Folgern Sie aus der Ungleichung die Normeigenschaft $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für $v, w \in V$.
- (b) Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ sei orthogonal, d. h., es gelte $\langle v\alpha, w\alpha \rangle = \langle v, w \rangle$. Zeigen Sie: Der Endomorphismus α ist invertierbar und besitzt höchstens die Eigenwerte $1, -1$.

Für die nachfolgenden Aufgabenteile bezeichne $V = \mathbb{R}^4$ den reellen Standardvektorraum, und für Vektoren $v = (x, y, z, w), \tilde{v} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w})$ aus V sei

$$\begin{aligned} \langle v, \tilde{v} \rangle &= \langle (x, y, z, w), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}) \rangle = \begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \quad (\dagger) \\ &= 3x\tilde{x} + x\tilde{y} + y\tilde{x} + \dots + 4w\tilde{w} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wie angegeben durch Matrizenmultiplikation und das übliche ‘Auslesen’ des Eintrags der resultierenden 1×1 -Matrix gegeben. Verwenden Sie für die zentrale Matrix die Notation

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (c) Offenbar ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$, wie in $(\dagger)$ definiert, bilinear und symmetrisch. Benennen und überprüfen Sie die fehlende dritte Eigenschaft, um zu schließen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^4$ ist.
- (d) Überprüfen Sie, dass

$$e_2 = (0, 1, 0, 0) \quad \text{und} \quad e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

die Bedingungen

$$\langle e_2, e_2 \rangle = 1, \quad \langle e_4, e_4 \rangle = 4 \quad \text{und} \quad \langle e_2, e_4 \rangle = 0$$

erfüllen.

- (e) Durch Vertauschung der Einträge der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ergibt sich die Basis $\mathfrak{B} = (e_2, e_4, e_3, e_1)$ für V , wobei e_2 und e_4 bereits die Bedingungen aus (d) erfüllen.

Verwenden Sie das Gram–Schmidtsche Verfahren, um ausgehend von der Basis $\mathfrak{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathfrak{D} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ für V bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu konstruieren.

Punkte. 6+4+4+3+8