

Aufgabe 1 (12 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ der Vektor-Gleichung

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

indem Sie die zugehörige Koeffizientenmatrix bilden, diese auf reduzierte Zeilenstufenform bringen und daraus die Lösungen ablesen.

- (b) In einem Ring R gilt für die Addition $+$ bekanntlich das Assoziativgesetz:

$$\forall x, y, z \in R : (x + y) + z = x + (y + z). \quad (*)$$

Leiten Sie daraus die folgende Rechenregel ab, wobei Sie bei jedem Schritt genau kenntlich machen, wie $(*)$ anzuwenden ist:

$$\forall a, b, c, d \in R : (a + b) + (c + d) = a + ((b + c) + d).$$

- (c) Berechnen Sie mittels wiederholter Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{F}_5)$$

wobei $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ den Körper mit 5 Elementen bezeichne.

Punkte. 4+4+4

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei K ein Körper, und sei V ein K -Vektorraum.

- (a) Sei W ein weiterer K -Vektorraum und $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Geben Sie die Definitionen für den Kern und das Bild von φ an.
- (b) Seien U, W Untervektorräume von V . Geben Sie an, unter welchen Bedingungen V definitionsgemäß die direkte Summe von U und W ist, also $V = U \oplus W$ gilt.
- (c) Ein Endomorphismus $\alpha \in \text{End}(V)$ habe die Eigenschaft $\alpha^2 = \alpha$. Beweisen Sie, daß dann $V = \text{Kern}(\alpha) \oplus \text{Bild}(\alpha)$ gilt.
- (d) Betrachten Sie nun konkret den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$, mit der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Nennen Sie explizit ein Beispiel für einen Endomorphismus $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\alpha^2 = \alpha$ und $\text{Rang}(\alpha) = 2$, indem Sie die zugehörige Koordinatenmatrix $A = [\alpha]_{\mathfrak{E}}$ angeben.

Punkte. 2+2+4+2

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers $\text{ggT}(59, 142)$ der Zahlen 59 und 142 mittels des Euklidischen Algorithmus wurde folgende Rechnung begonnen:

$$142 - 2 \cdot 59 = 24$$

$$59 - 2 \cdot 24 = 11$$

...

- (a) Vervollständigen Sie die Rechnung und bestimmen Sie so $\text{ggT}(59, 142)$.
- (b) Bestimmen Sie mittels der Erweiterung des Euklidischen Algorithmus eine explizite Darstellung von $\text{ggT}(59, 142)$ als ganzzahlige Linearkombination von 59 und 142.
- (c) Ist 59 modulo 142 invertierbar, d.h., ist die Restklasse $\overline{59}$ eine Einheit in dem Restklassenring $\mathbb{Z}/142\mathbb{Z}$? – Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie ggf. das multiplikativ inverse Element zu $\overline{59}$ in $\mathbb{Z}/142\mathbb{Z}$.
- (d) Hat die Kongruenzgleichung

$$59x + 37 \equiv_{71} 0$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung x in $\mathbb{Z}$? – Begründen Sie Ihre Antwort.

Punkte. 2+4+2+2

Aufgabe 4 (18 Punkte)

Sei K ein Körper, und sei V ein K -Vektorraum. Sei $\alpha: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

- (a) Geben Sie die Definitionen für die Begriffe „Eigenvektor“, „Eigenwert“ sowie „Eigenraum“, in Hinblick auf α , an.
- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren für α zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Zeigen Sie per Induktion nach n , daß $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, indem Sie zu geeigneten Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in K$ die Terme

$$\lambda_n \sum_{i=1}^n c_i v_i \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i \right) \alpha$$

betrachten, geeignet umformen und vergleichen.

- (c) Der Endomorphismus $\alpha \in \text{End}(V)$ habe die Eigenschaft $\alpha^3 = \alpha$. Zeigen Sie, daß α höchstens Eigenwerte gleich 0, 1 oder -1 besitzen kann.
- (d) Betrachten Sie nun konkret den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ über $K = \mathbb{R}$, mit der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Die Koordinatenmatrix von α bzgl. $\mathfrak{E}$ sei

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Basis für V , die vollständig aus Eigenvektoren für α besteht?

Punkte. 4+6+4+4

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Sei K ein Körper, und sei V ein 4-dimensionaler K -Vektorraum mit Basis $\mathfrak{E} = (e_1, \dots, e_4)$. Sei $\alpha: V \rightarrow V$ der Endomorphismus mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(K).$$

- (a) Geben Sie die Definition für den Rang einer linearen Abbildung $\varphi: U \rightarrow W$ zwischen K -Vektorräumen an.
- (b) Geben Sie, in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$, explizit Basen für $\text{Kern}(\alpha^k)$ und für $\text{Bild}(\alpha^k)$ an; bestimmen Sie zudem den Rang von $\alpha^k \in \text{End}(V)$. Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Betrachten Sie $\text{Mat}_4(K)$ wie üblich als K -Vektorraum. Weisen Sie mit Hilfe des Untervektorraumkriteriums nach, daß

$$\mathcal{U} = \{B \in \text{Mat}_4(K) \mid AB = BA\}$$

ein Untervektorraum von $\text{Mat}_4(K)$ ist.

- (d) Zeigen Sie, daß der in (c) betrachtete Untervektorraum $\mathcal{U}$ weder gleich $\{0\}$ noch gleich $\text{Mat}_4(K)$ ist.
- (e) Sei $\beta: V \rightarrow V$ der lineare Endomorphismus mit Koordinatenmatrix

$$B = [\beta]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(K).$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ für V mit den Eigenschaften

$$v_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \text{und} \quad [\beta]_{\mathfrak{B}} = A,$$

sowie eine Matrix $T \in \text{GL}_4(K)$ mit der Eigenschaft $TBT^{-1} = A$.

Punkte. 2+6+4+2+6

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- (a) Geben Sie die drei definierenden Bedingungen für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sowie die Definition der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ an.
- (b) Geben Sie die Definition einer Orthonormalbasis für V bezüglich eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ an.
- (c) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$, der Standardvektorraum, und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Überprüfen Sie, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt auf V definiert.

- (d) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens für die Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, 2)$$

eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt aus (c).

- (e) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ und $\alpha: V \rightarrow V$ linear mit Koordinatenmatrix

$$[\alpha]_{\mathfrak{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathfrak{D} = (v_1, v_2)$ für V , die aus Eigenvektoren von α besteht, und geben Sie $[\alpha]_{\mathfrak{D}}$ an. Überprüfen Sie, ob v_1, v_2 bezüglich des Standardskalarproduktes

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

senkrecht zueinander stehen.

Punkte. 4+2+3+5+6

Aufgabe 7 (15 Punkte)

Betrachten Sie $\mathcal{V} = \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$ als 9-dimensionalen $\mathbb{Q}$ -Vektorraum sowie die Permutationsmatrizen

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & P_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & P_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & P_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (a) Belegen Sie, daß die sechs Matrizen $P_1, P_2, \dots, P_6$ als Vektoren in $\mathcal{V}$ *nicht* linear unabhängig sind, beispielsweise indem Sie zwei verschiedene Linearkombination dieser Matrizen mit Koeffizienten in $\{0, 1\}$ angeben, die beide die gleiche Matrix ergeben.
- (b) Bestimmen Sie die Dimension der linearen Hülle

$$\mathcal{U} = \langle \{P_1, P_2, \dots, P_6\} \rangle \subseteq \mathcal{V}$$

sowie eine geordnete Basis $\mathfrak{B}$ für den Untervektorraum $\mathcal{U}$, die sich aus geeigneten Permutationsmatrizen zusammensetzt.

- (c) Transponieren liefert erkennbarerweise eine lineare Abbildung $\vartheta: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, $A \mapsto A^{\text{tr}}$. Berechnen Sie die Koordinatenmatrix $[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ von ϑ bzgl. der von Ihnen in (b) bestimmten Basis $\mathfrak{B}$.
- (d) Entscheiden Sie, ob der in (c) betrachtete Endomorphismus $\vartheta \in \text{End}(\mathcal{U})$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie ggf. eine Basis $\mathfrak{C}$ für $\mathcal{U}$, so daß $[\vartheta]_{\mathfrak{C}}$ Diagonalgestalt besitzt.

Punkte. 3+5+3+4

Aufgabe 8 (15 Punkte)

Betrachten Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ die $m \times m$ -Matrix

$$B_{m,n} = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_m(\mathbb{Q})$$

mit Diagonaleinträgen n und Einträgen 1 an allen anderen Positionen.

- (a) Geben Sie zunächst (ohne Beweis) die Leibniz-Formel für die Berechnung der Determinante einer allgemeinen $m \times m$ -Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_m(\mathbb{Q})$ an. Nennen Sie in diesem Zusammenhang auch die Definition einer Permutation. Weitere darüber hinaus einfließende Konzepte sollten Sie mit dem jeweiligen Fachbegriff kurz benennen; Sie brauchen diese aber nicht im Detail zu definieren.
- (b) Berechnen Sie nun konkret $\det(B_{3,3})$, indem Sie die Determinante direkt nach der ersten Spalte entwickeln und dann geeignet weiterrechnen.
- (c) Leiten Sie alsdann allgemein, für $m, n \in \mathbb{N}$, die Rekursionsformel

$$\det(B_{m,n}) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-1} \cdot \det(B_{m-1,n+1})$$

her, indem Sie ausnutzen, wie sich die Determinante unter elementaren Zeilenumformungen verhält: Transformieren Sie die Matrix $B_{m,n}$ geeignet in eine Matrix $B'_{m,n} \in \text{Mat}_m(\mathbb{Q})$, deren erste Spalte nahezu nur Nulleinträge besitzt, so daß die Berechnung von $\det(B'_{m,n})$ auf die Berechnung von $\det(B_{m-1,n+1})$ zurückgeführt werden kann.

- (d) Verwenden Sie schließlich die Rekursionsformel in (c), um beispielhaft $\det(B_{5,2})$ ohne großen Rechenaufwand, sondern durch geschicktes Kürzen explizit zu berechnen.

Punkte. 4+3+5+3

