

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- (a) Ergänzen Sie alle fehlenden Einträge W, F („wahr“ bzw. „falsch“) in der nachfolgenden Wahrheitstafel, mit Hilfe derer Konsequenzen dreier mathematischer Aussagen α, β, γ überprüft werden sollen.

α	β	γ	$\alpha \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$(\alpha \rightarrow \gamma) \vee (\beta \rightarrow \gamma)$	$\alpha \wedge \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$
W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F		F		F	
W	F	W	W			F	
	F	F				F	
W	F		F			F	
F						F	
W	W		F	F		W	
F	W		W	W		F	

- (b) Begründen Sie anhand der vollständigen Tafel aus (a), ob die Aussage

$$((\alpha \rightarrow \gamma) \vee (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma).$$

allgemein für beliebige Aussagen α, β, γ richtig ist oder nicht.

- (c) Seien $A, B, C \subseteq M$ Mengen. Geben Sie knapp an, welche Interpretation die Aussage in (b) in Hinblick auf die Mengen

$$(M \setminus A) \cup (M \setminus B) \cup C \quad \text{und} \quad (M \setminus (A \cap B)) \cup C$$

besitzt, indem Sie geeignete Aussagen α, β, γ formulieren und einsetzen.

Punkte. 5+2+3

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K , und sei $M \subseteq V$.

- (a) Geben Sie die Definition für die lineare Hülle $\langle M \rangle$ von M in V an.
- (b) Beweisen Sie, direkt ohne Verwendung tiefer liegender Sätze, die grundlegende Aussage: Ist $v \in V$ mit $\langle M \setminus \{v\} \rangle \subsetneq \langle M \rangle$, so gilt bereits $v \notin \langle M \setminus \{v\} \rangle$.
- (c) Betrachten Sie nun konkret den $\mathbb{Q}$ -Vektorraum $\mathbb{Q}^5$. Bestimmen Sie die lineare Hülle $W = \langle w_1, \dots, w_5 \rangle$ der Vektoren

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), & w_2 &= (1, 2, 1, 2, 1), & w_3 &= (0, -1, 0, 1, 0), \\ w_4 &= (2, 0, 2, 6, 2), & w_5 &= (3, 1, 3, 7, 3), \end{aligned}$$

indem Sie eine Basis für W berechnen.

- (d) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & -7 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 15 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & -7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & + & 7x_5 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & -7 \end{array}$$

eine Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5$ besitzt, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie auf Ihr Ergebnis aus (c) zurückgreifen.

Punkte. 2+4+4+2

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Seien $\varphi: U \rightarrow V$ und $\psi: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen über einem Körper K .

- (a) Geben Sie die Definition für $\text{Rang}(\varphi)$, den Rang der linearen Abbildung φ , an.
- (b) Geben Sie (ohne Beweis) die Dimensionsformel für die lineare Abbildung φ an, die eine alternative Formel zur Berechnung von $\text{Rang}(\varphi)$ liefert.
- (c) Zeigen Sie: $\text{Kern}(\varphi\psi) = \{u \in U \mid u\varphi \in \text{Kern}(\psi)\}$.
- (d) Folgern Sie aus (c) mit Hilfe einer Dimensionsformel die Abschätzung

$$\dim(\text{Kern}(\varphi\psi)) \leq \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Kern}(\psi)).$$

- (e) Verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus (b) und (d), um zu beweisen:

$$\text{Rang}(\varphi) + \text{Rang}(\psi) \leq \text{Rang}(\varphi\psi) + \dim(V).$$

Punkte. 2+2+3+3+4

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Betrachten Sie $V = \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ in der üblichen Weise als $\mathbb{R}$ -Algebra, insbesondere als Vektorraum. Sei

$$U = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v}^{\text{tr}} = -\mathbf{v}\} \subseteq V,$$

wobei $\mathbf{v}^{\text{tr}}$ die zu $\mathbf{v}$ transponierte Matrix bezeichnet.

- (a) Bestimmen Sie konkret die Transponierte $\mathbf{b}^{\text{tr}}$ der Matrix

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

- (b) Verwenden Sie das Untervektorraumkriterium, um nachzuweisen, daß U einen Untervektorraum von V bildet.
- (c) Bestimmen Sie explizit eine Basis $\mathfrak{B}$ für U .
- (d) Zeigen Sie, daß V mittels

$$\eta: V \rightarrow V, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - \mathbf{v}^{\text{tr}}$$

surjektiv auf U abgebildet wird, indem Sie Ihre Erkenntnisse aus (b) und (c) nutzen.

- (e) Berechnen Sie, für beliebiges $\mathbf{u} = (u_{ij})_{i,j} \in U$, das charakteristische Polynom $f_{\mathbf{u}} = \text{Charpol}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}[X]$ und zerlegen Sie $f_{\mathbf{u}}$, in Abhängigkeit von $\mathbf{u}$, in ein Produkt von über $\mathbb{R}$ irreduzible Faktoren.
- (f) Verwenden Sie Ihre Antwort zu (e), um alle $\mathbf{u} \in U$ zu bestimmen, die in $\text{Mat}_3(\mathbb{R})$ invertierbar sind.
- (g) Verwenden Sie Ihre Antwort zu (e), um alle $\mathbf{u} \in U$ zu bestimmen, die (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar sind.

Punkte. 2+3+2+3+4+1+1

Aufgabe 5 (14 Punkte)

Betrachten Sie zu $m \in \mathbb{N}$ den Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.

- (a) Begründen Sie: Ist m zusammengesetzt, also $m = ab$ für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 < a, b < m$, so ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kein Körper.
- (b) Geben Sie (ohne Beweis) ein Kriterium an, das sich aus der Teilbarkeitstheorie für $\mathbb{Z}$ ergibt und anhand dessen entschieden werden kann, ob für $x \in \mathbb{Z}$ das zugeordnete Element $\overline{x}$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ invertierbar ist oder nicht.
- (c) Bestimmen Sie, für $m = 20$, explizit die Elemente der Einheitengruppe $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ und alsdann die Menge $\{\overline{x^2} \mid \overline{x} \in G\}$ aller Quadrate in G .
- (d) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus und das Kriterium aus (b), um für $m = 1001$ konkret zu entscheiden, ob $\overline{584}$ in $\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}$ invertierbar ist oder nicht.

Punkte. 3+3+4+4

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

- (a) Geben Sie an, wie der Rang einer Matrix $A \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ definiert ist und welche Werte $\text{Rang}(A)$ für derartige Matrizen tatsächlich annehmen kann.
- (b) Geben Sie (ohne Beweis) an, wie sich die Äquivalenz¹ von Matrizen $A, B \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ mit Hilfe einer geeigneten Invariante kennzeichnen läßt. Geben Sie zudem Vertreter für die verschiedenen Äquivalenzklassen in $\text{Mat}_{3,2}(K)$ an.

Betrachten Sie nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -x & -2y \\ -1 & z & x & y+3z \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2,4}(\mathbb{Q}),$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{Q}$ Parameter darstellen.

- (c) Entscheiden und begründen Sie, in Abhängigkeit von (x, y, z) , welche der nachfolgenden Matrizen jeweils äquivalent zu A sind.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Entscheiden und begründen Sie, in Abhängigkeit von (x, y, z) , ob es eine Matrix $S \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})$ gibt, dergestalt, daß $A' = SA$ gleich einer der unter (c) genannten Matrizen B_1, B_2, B_3 ist.
- (e) Bestimmen Sie für $x \neq 0$, in Abhängigkeit von (x, y, z) , Matrizen $S \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})$ und $T \in \text{GL}_4(\mathbb{Q})$ dergestalt, daß $A' = SAT$ gleich einer der unter (c) genannten Matrizen B_1, B_2, B_3 ist.

Punkte. 3+3+5+4+5

¹Zur Erinnerung: Zwei Matrizen $A, B \in \text{Mat}_{m,n}(K)$ heißen äquivalent, wenn es $S \in \text{GL}_m(K)$ und $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = SAT$ gibt.

Aufgabe 7 (18 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ein Körper mit 5 Elementen. Sei $\alpha: \mathbb{F}_5^4 \rightarrow \mathbb{F}_5^4$ der lineare Endomorphismus des Standardvektorraums $\mathbb{F}_5^4$ mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_4(\mathbb{F}_5)$$

bzgl. der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, bestehend aus $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\dots$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$; also $e_1\alpha = e_4$, $e_2\alpha = 4e_3$ usw.

- (a) Verifizieren Sie mittels geeigneter Zeilenumformungen, daß A (und damit α) den vollen Rang 4 hat, und berechnen Sie $A^{-1} = [\alpha^{-1}]_{\mathfrak{E}}$.
- (b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $f = \text{Charpol}(\alpha) \in \mathbb{F}_5[X]$.
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von α sowie deren algebraische Vielfachheiten.
- (d) Berechnen Sie zu *einem* der gefundenen Eigenwerte den Eigenraum von α , indem Sie eine geeignete Basis bestimmen. Geben Sie die geometrische Vielfachheit des betroffenen Eigenwerts an.
- (e) Entscheiden Sie, ob α diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

Punkte. 4+4+4+4+2

Aufgabe 8 (16 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und euklidischer Norm $\| \cdot \|$. Weiter seien $U \subsetneq V$ ein Untervektorraum von V und $v \in V \setminus U$.

- (a) Geben Sie an, unter welcher Bedingung definitionsgemäß zwei Vektoren aus V senkrecht zueinander stehen; notieren Sie die Definition des Senkrechttraumes $U^\perp$.
- (b) Bekanntlich läßt sich in einem euklidischen Vektorraum jedes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis ergänzen. Folgern Sie: Es existiert genau ein $u_0 \in U$ mit der Eigenschaft $v - u_0 \in U^\perp$.
- (c) Zeigen Sie: Der durch die in (a) beschriebene Bedingung eindeutig bestimmte Vektor $u_0 \in U$ besitzt die zusätzliche Eigenschaft

$$\forall u \in U \setminus \{u_0\} : \|v - u_0\| < \|v - u\|.$$

- (d) Sei nun konkret $V = \mathbb{R}^4$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Seien

$$U = \langle (2, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle \quad \text{und} \quad v = (3, 0, 4, 1).$$

Bestimmen Sie in diesem Fall explizit den Vektor $u_0 \in U$ mit der in (b) beschriebenen Eigenschaft sowie $\|v - u_0\|$.

Punkte. 2+4+4+6