

Linear Algebra I
Übungsblatt 1
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

Sei $M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$ die Koeffizientenmatrix von \underline{L} , die in Normalform gebracht worden ist. Für jedes $i \leq n$ gibt es drei Möglichkeiten: entweder die i^{te} Spalte enthält keinen Pivot-Eintrag; dann lässt sich jede reelle Zahl c_i zu einer Lösung ergänzen; oder die i^{te} Spalte enthält einen Pivot-Eintrag $a_{j,i}$. In diesem Fall ist die j^{te} Gleichung genau wie folgt:

$$x_i + a_{j,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j.$$

Wenn für alle $k > i$ alle $a_{j,k} = 0$ sind, dann gilt $x_i = b_j$, und genau eine reelle Zahl lässt sich zu einer Lösung ergänzen; nämlich $c_i = b_j$.

Wenn für mindestens ein $k > i$ ein Koeffizient $a_{j,k} \neq 0$ ist, dann lässt sich jede reelle Zahl c_i zu einer Lösung ergänzen: Sei $c_i \in \mathbb{R}$ und sei $a_{j,k} \neq 0$. Dann enthält die k^{te} Spalte keinen Pivot-Eintrag, und wir können $x_k = \frac{b_j - c_i}{a_{j,k}}$ wählen. Für alle anderen $k' > i$ mit $a_{j,k'} \neq 0$ enthält auch die k'^{te} Spalte keinen Pivot-Eintrag, d. h. wir können $x_{j,k'} = 0$ wählen. Dann gilt

$$x_i + 0 + \cdots + 0 + a_{j,k} \frac{b_j - c_i}{a_{j,k}} + 0 + \cdots + 0 = b_j$$

und das impliziert $x_i = c_i$. Das heißt, jede reelle Zahl c_i lässt sich zu einer Lösung ergänzen.

Aufgabe 2.

- Ja: wenn A wahr ist, sind beide Aussagen wahr; wenn A falsch ist und sowohl B als auch C wahr sind, sind beide Aussagen wahr; und in allen anderen Fällen sind beide Aussagen falsch.
- Ja: " $A \Rightarrow B$ " ist falsch gdw. A wahr ist und B falsch ist; " $\neg A \vee B$ " falsch ist gdw. $\neg A$ und B beide falsch sind, das heißt, A wahr ist und B falsch ist.
- Nein: wenn A wahr, B falsch und C beliebig sind, sind " $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ " wahr und " $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ " falsch.
- Nein: wenn A und B beide wahr sind, sind " $A \Rightarrow B$ " wahr und " $\neg(B \Rightarrow A)$ " falsch.
- Ja: aus (b) folgt, dass " $A \Rightarrow B$ " und " $\neg A \vee B$ " äquivalent sind, und auch dass " $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ " und " $\neg\neg B \vee \neg A$ " äquivalent sind, und weil $\neg\neg B$ und B äquivalent sind, folgt die Antwort.
- Ja: wenn B falsch ist, sind beide Aussagen falsch; wenn B wahr ist und A falsch ist, sind beide Aussagen wahr; und wenn beide A und B wahr sind, sind beide Aussagen falsch.

Aufgabe 3.

- a)
 - i) Es existiert (mindestens) eine natürliche Zahl, die Alina sehr mag.
 - ii) Für jeder natürliche Zahl x gibt es (mindestens) eine reelle Zahl y , die Alina nicht genauso mag wie x .
 - iii) Es existiert (mindestens) eine reelle Zahl y , die Alina nicht genauso mag wie jede naturale Zahlen.
 - iv) Entweder Alina mag alle natural Zahlen gar nicht, oder Alina mag alle natural Zahlen ein bisschen.
 - v) Alina mag jede natürliche Zahlen entweder ein bisschen oder gar nicht.
- b) Wenn Alina alle Zahlen gar nicht mag, außer 0, die sie sehr mag, und 1, die sie ein bisschen mag; dann ist (ii) wahr und (iii) falsch.
- c) Wenn Alina gerade natürliche Zahlen ein bisschen mag und underade natürliche Zahlen gar nicht mag, dann ist (v) wahr aber (iv) falsch.
- d) (i) ist genau $\neg(v)$ – und (v) ist genau $\neg(i)$.
- e) Es existiert eine natürliche Zahl die Alina genauso mag wie alle reelle Zahlen.