

Lineare Algebra I, SoSe23 Blatt 9

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Nutzen Sie die Aussage aus Aufgabe 2 und Satz 3.4.9, um eine Basis von

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

zu finden.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $n = \dim(V)$. Seien zudem $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind.

- (i) Das Tupel (v_1, \dots, v_n) ist linear unabhängig.
- (ii) Das Tupel (v_1, \dots, v_n) erzeugt V .
- (iii) Das Tupel (v_1, \dots, v_n) ist eine Basis von V .

Aufgabe 3 (5 Punkte):

- (i) Gibt es Untervektorräume $U, U' \subset \mathbb{R}^6$ mit $\dim(U) = 5$, $\dim(U') = 2$ und $\dim(U \cap U') = 1$?
- (ii) Was passiert in Aufgabenteil (i), wenn $\dim(U') = 3$ ist?
- (iii) Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$\dim(U + U') = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U \cap U')$$

für alle Untervektorräume $U, U' \subset V$ ist. Sei nun U'' ein weiterer Untervektorraum von V so, dass U, U' und U'' paarweise trivialen Schnitt haben (der Schnitt ist also stets $\{0\}$). Gilt auch dann die Formel

$$\dim(U + U' + U'') = \dim(U) + \dim(U') + \dim(U'')$$

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der 1-dimensionalen Untervektorräume von \mathbb{F}_p^n .

Lineare Algebra I, SoSe23

Blatt 9

Einige generelle Tipps:

- Beginnen Sie möglichst früh damit, sich mit den Aufgaben auseinanderzusetzen
- Machen Sie sich die exakte Bedeutung der verwendeten Begriffe und Definitionen durch Nachschlagen im Skript bewusst
- Manche Aufgaben können Sie (vermutlich) nur unter Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung lösen, sodass Sie stets im Blick haben sollten, was Sie denn bereits über gegebene Objekte wissen
- Selbst wenn Sie eine Definition oder eine Aussage kennen, hilft es, sich diese mit Beispielen zu veranschaulichen
- Manche Aussagen lassen sich leichter per Widerspruchsbeweis oder per Kontraposition zeigen; versuchen Sie also ruhig verschiedene Ansätze
- Lassen Sie sich nicht zu sehr frustrieren, wenn Sie nicht alles auf Anhieb lösen können
- Sprechen Sie mit Anderen über die Aufgaben (sowohl Kommilitonen, Korrektoren als auch Übungsgruppenleiter bieten sich dort zum Beispiel an)
- Suchen Sie nicht nach (vollständigen) Lösungen online (oder in Büchern etc.), da dies nur Ihr eigenes Verständnis bremst (auch das Versuchen und Scheitern an Problemen ist lehrreich, selbst wenn es erstmal nicht so scheint)
- Begründen Sie Ihre Antworten, außer wenn explizit dabei steht, dass Sie es nicht tun müssen
- Schreiben Sie Ihre Lösungen möglichst nicht als eine reine Folge von Symbolen auf, sondern verwenden Sie auch vollständige (deutsche, englische, etc.) Sätze um Ihre Gedanken zu erklären