Spezielle Themen der Analysis: Komplexe Analysis

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Der $\overline{\partial}$-Operator 5

2 Holomorphiegebiete 9

3 Subharmonische Funktionen 13

4 Plurisubharmonische Funktionen 19

5 Zwei funktionalanalytische Lemmata 23

6 Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung 25

7 Regularität der Lösungen der $\overline{\partial}$-Gleichung 29

8 Lösung des Levi-Problems 31

9 Die Cousinschen Probleme 35

10 Garben 39

1 Der $\overline{\partial}$-Operator

1.1 Notation. Wenn wir $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$ identifizieren, dann setzen wir $z_j = x_j + iy_j$. Mit dieser Setzung definieren wir für komplexwertige Funktionen u der Klasse C^1

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - i\frac{\partial u}{\partial y_j}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial u}{\partial y_j}\right).$$

Mit $\Lambda^k(\mathbb{R}^{2n})$ bezeichnen wir die komplexwertigen alternierenden k-Formen auf dem $\mathbb{R}^{2n}$. Eine Basis von $\Lambda^k(\mathbb{R}^{2n})$ wird gegeben durch

$$dz_j := dx_j + i\,dy_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$
$$d\overline{z}_j := dx_j - idy_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Damit definieren wir für u von der Klasse C^1 zwei Differentialformen

$$\partial u := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}\, dz_j \quad \text{und} \quad \overline{\partial} u := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\overline{\partial} z_j}\, d\overline{z}_j.$$

Wie in der Analysis III definieren wir das äußere Produkt $u \wedge v$ zweier Differentialformen. Eine $p+q$-Form, deren sämtliche Summanden genau p Faktoren der Form dz_j und q Faktoren der Form $d\overline{z}_j$ besitzt, ist vom *Typ* (p, q).

Die Volumenform im $\mathbb{R}^{2n}$ ist $dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n$.

1.2 Bemerkung. Sei $\omega \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte, offene Menge, welche von einer stückweisen C^1-Jordankurve berandet wird, und sei $u \in C^1(\overline{\omega})$. Dann besagt der Satz von Stokes

$$\int_{\partial\omega} u\ dz = \int_{\omega} d(u\ dz) = -\int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\, dz \wedge d\overline{z}.$$

1.3 Theorem (Cauchysche Integralformel). *Für* $u \in C^1(\overline{\omega})$ *und* $\zeta \in \omega$ *gilt*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial\omega} \frac{u(z)}{z-\zeta}\, dz + \int_{\omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)}{z-\zeta}\, dz \wedge d\overline{z}\right).$$

1.4 Satz. *Es sei* μ *ein Maß mit kompaktem Träger in* $\mathbb{C}$*. Dann wird durch*

$$u(\zeta) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-\zeta}\, d\mu(z)$$

eine Funktion gegeben, die außerhalb des Trägers von μ *holomorph ist. Falls für eine offene Menge* $\omega \subset \mathbb{C}$ *ein* $k \in \mathbb{N}$ *und ein* $\varphi \in C^k(\omega)$ *existieren, so dass*

$$\mu = \frac{\varphi}{2\pi i}\, dz \wedge d\bar{z},$$

so ist die Einschränkung von u *auf* ω *von der Klasse* C^k *und es gilt*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi.$$

1.5 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^1(\Omega)$ heißt *holomorph*, wenn $\bar{\partial} u = 0$.

Die $\mathbb{C}$-Algebra aller holomorphen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit $A(\Omega)$.

1.6 Definition. Ein Produkt $D = \prod_{j=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ von Kreisscheiben D_j ist ein *Polyzylinder*.

Die Menge $\partial_0 D := \prod_{j=1}^n \partial D_j$ ist sein *distiguierter Rand*.

1.7 Satz (Cauchysche Integralformel für Polyzylinder). *Es sei* $D \subset \mathbb{C}^n$ *ein offener Polyzylinder und es sei* u *stetig in* $\overline{D}$. *Ferner sei die Einschränkung von* u *auf* D *holomorph in jeder einzelnen Variablen, wenn die anderen festgehalten werden. Dann gilt für jedes* $z \in D$

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{u(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

Insbesondere ist u *von der Klasse* C^∞ *und daher holomorph.*

Beweis. Mehrfache Anwendug der Cauchyschen Integralformel. □

1.8 Theorem (Hartogs). *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *offen und es sei* $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *eine Funktion derart, dass* u *holomorph in jeder einzelnen Variablen ist, wenn die anderen festgehalten werden. Dann ist* u *holomorph.*

Beweis. Das wird in dem Buch von Hörmander in den Punkten 2.2.8–2.2.11 gezeigt. □

1.9 Korollar (zu Satz 1.7). *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *offen,* $K \subset \Omega$ *kompakt und* ω *offen mit* $K \subset \omega \subset \Omega$. *Dann existiert zu jedem* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ *ein* $C > 0$, *so dass für jedes* $u \in H(\Omega)$ *gilt*

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial z^\alpha} \right| \leq C \|u\|_{L^1(\omega)}.$$

1.10 Notation. Es sei $K_1 \subset \cdots \subset \Omega$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Durch das Halbnormensystem $\|\cdot\|_{L^\infty(K_n)}$ wird $\mathcal{A}(\Omega)$ zu einem metrischen lokalkonvexen Raum.

1.11 Korollar (zu Satz 1.7). $\mathcal{A}(\Omega)$ *ist ein Fréchetraum.*

1.12 Satz. $\mathcal{A}(\Omega)$ *ist ein Montelraum.*

1.13 Satz. *Es sei* u *holomorph im Polyzylinder* $D = \prod_{j=1}^{n} B_{r_j}(0)$. *Dann gilt*

$$u(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\alpha u}{\partial z^\alpha}(0) \frac{z^\alpha}{\alpha!}.$$

Die Reihe konvergiert in $\mathcal{A}(D)$.

1.14 Korollar. u *sei holomorph mit* $|u| \le M$ *in dem Polyzylinder* $\prod_{j=1}^{n} B_{r_j}(0)$. *Dann gilt für jedes* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\frac{1}{\alpha!} \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial z^\alpha}(0) \right| \le \frac{M}{r^\alpha}.$$

1.15 Korollar. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *offen und zusammenhängend. Wenn* $u_1, u_2 \in A(\Omega)$ *auf einer Menge übereinstimmen, die einen inneren Punkt hat, dann sind sie gleich.*

1.16 Bemerkung. Es sei f eine 1-Form der Klasse C^1 vom Typ $(0,1)$. Wir wollen die inhomogene Cauchy-Riemann Gleichung $\overline{\partial} u = f$ modulo holomorpher Funktionen lösen.

Jedenfalls ist f von der Gestalt

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j \, d\overline{z}_j.$$

Wir verlangen also

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} = f_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Wir wissen aus der Analysis III, dass $d^2 = 0$. Die Gleichung kann also nur dann gelöst werden, wenn $df = 0$. Da f vom Typ $(0,1)$ ist, ist diese Forderung äquivalent zu $\overline{\partial} f = 0$. So erhält man die Kompatibilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} = 0, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

1.17 Theorem. *Es sei* $n > 1$. *Für* $k \in \mathbb{N}$ *und* $j = 1, \ldots, n$ *sei* $f_j \in C^k(\mathbb{C}^n)$ *eine Funktion mit kompaktem Träger. Die Kompatibilitätsbedingungen* (1.2) *seien erfüllt. Dann existiert eine Funktion* $u \in C^k(\mathbb{C}^n)$ *mit kompaktem Träger, welche die Gleichungen* (1.1) *erfüllt.*

1.18 Theorem (Hartogssches Phänomen). *Sei* $n > 1$, *sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *offen und sei* $K \subset \Omega$ *kompakt, so dass* $\Omega \setminus K$ *zusammenhängend ist. Für jedes* $u \in \mathcal{A}(\Omega \setminus K)$ *existiert eine holomorphe Fortsetzung* $U \in \mathcal{A}(\Omega)$.

2 Holomorphiegebiete

2.1 Definition. Eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Holomorphiegebiet,* wenn es keine offenen Mengen Ω_1 und Ω_2 in $\mathbb{C}^n$ mit den folgenden Eigenschaften gibt

(a) $\emptyset \neq \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \cap \Omega$.

(b) Ω_2 ist zusammenhängend und keine Teilmenge von Ω.

(c) Für jedes $u \in A(\Omega)$ existiert eine Funktion $u_2 \in A(\Omega_2)$, die in Ω_1 mit u übereinstimmt.

2.2 Beispiel. Der Hartogs-Topf aus Theorem 1.18 ist kein Holomorphiegebiet.

2.3 Satz. *Jede offene Menge in* $\mathbb{C}$ *ist ein Holomorphiegebiet.*

Das haben wir auf Blatt 1 gezeigt.

2.4 Definition. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und K eine kompakte Teilmenge von Ω. Dann bezeichnet man die Menge

$$\hat{K}_\Omega := \left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \forall f \in A(\Omega) : |f(z)| \leq \sup_K |f| \right\}$$

als $A(\Omega)$-*konvexe Hülle* von K.

2.5 Bemerkung. (a) Die *konvexe Hülle* einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge, die M umfasst.

(b) Ein *abgeschlossener Halbraum* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form $H = T^{-1}([r, \infty[)$, wobei $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional und $r \in \mathbb{R}$ ist. Die konvexe Hülle von $M \in \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, welche M umfassen.

(c) Wenn wir über (klassische) Konvexität sprechen, dann betrachten wir $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}^{2n}$.

2.6 Satz. $\hat{K}_\Omega$ *ist in der konvexen Hülle von* K *enthalten.*

Beweis. Übung. □

2.7 Satz (Dini). *Es sei* X *ein kompakter topologischer Raum und es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine fallende Folge in* $C(X,\mathbb{R})$*, deren punktweiser Grenzwert stetig ist. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Beweis. Der punktweise Grenzwert heiße f. Sei $\epsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $U_n := \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\}$. Wegen der Stetigkeit von f ist U_n offen, und weger der punktweisen Konvergenz gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. □

2.8 Notation. Wenn D ein offener Polyzylinder mit Zentrum in 0 ist, dann setzen wir für $z \in \Omega$

$$\triangle_{\Omega}^{D}(z) := \sup\{r > 0 \mid z + rD \subset \Omega\}.$$

2.9 Lemma. *Wenn* $u \in A(\Omega)$*, dann konvergiert die Taylorreihe von* u *mindestens in* $\zeta + \triangle_{\Omega}^{D}(\zeta)D$*.*

2.10 Lemma. *Es sei* $f \in A(\Omega)$ *derart, dass*

$$|f(z)| \leq \triangle_{\Omega}^{D}(z) \quad \textit{für alle } z \in K,$$

und es sei $\zeta \in \hat{K}_{\Omega}$*. Wenn nun* u *eine weitere holomorphe Funktion in* Ω *ist, dann konvergiert die Taylorreihe von* u *um* ζ *in dem Polyzylinder* $\zeta + |f(\zeta)|D$*.*

Beweis. $D := \prod_{j=1}^{n} B_{r_j}(0)$. Sei $0 < t < 1$, dann ist

$$A := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \exists w \in K \,\forall j : |z_j - w_j| \leq t r_j |f(w)|\}$$

kompakt als Bild von $K \times t\overline{D}$ unter der Abbildung $(w, s) \mapsto w + s|f(w)|$. Also gibt es $M \geq 0$, so dass $|u(z)| \leq M$ für alle $z \in A$. Aus der CAF erhalten wir für $w \in K$

$$\left|\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial z^{\alpha}}\right| \frac{t^{|\alpha|} r^{\alpha} |f(w)|^{|\alpha|}}{\alpha!} \leq M.$$

Weil $f(w)\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial z^{\alpha}}(w)$ holomorph ist, gilt diese Abschätzung auch für $w \in \hat{K}_{\Omega}$. Wir setzen $w = \zeta$. Dann konvergiert die Taylorreihe im Polyzylinder $\zeta + |f(\zeta)|D$. □

2.11 Notation. Es sei δ eine positiv homogene Funktion im $\mathbb{C}^n$, die in $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ nur positive Werte annimmt. Dann setzen wir

$$\delta(z, \complement\Omega) := \inf\{\delta(z - w) \mid w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega\}.$$

Diese Funktion ist stetig in $z \in \Omega$.

2.12 Theorem. *Sei* Ω *ein Holomorphiegebiet, es sei* $K \subset \Omega$ *kompakt und es sei* $f \in A(\Omega)$*. Falls*

$$|f(z)| \leq \delta(z, \complement\Omega)$$

für alle $z \in K$ *gilt, so gilt die Ungleichung auch für alle* $z \in \hat{K}_{\Omega}$*.*

Beweis. Im Fall, dass $D := \{z \in \mathbb{C}^n | \delta(z) < 1\}$ ein Polyzylinder ist, folgt der Satz sofort aus dem vorhergehenden.

Andernfalls setzen wir für $w \in \mathbb{C}^n$

$$\delta_w(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) := \sup\{r > 0 | \forall a \text{ mit } |a| < r : z + aw \in \Omega\}.$$

Dann gilt

$$\delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) = \inf_{\delta(w) \leq 1} \delta_w(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega).$$

"$\leq$": Sei $\delta(w) \leq 1$, sei $r := \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ und sei $a \in \mathbb{C}^n$ mit $|a| < r$. Dann ist zu zeigen $z + aw \in \Omega$. Das folgt sofort aus $\delta(z - (z + aw)) < r\delta(w) = \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$.

"$\geq$": Das Infimum heiße I. Es sei $(w_j)_j$ eine Folge mit $\delta(w_j) = 1$ und $\delta_{w_j}(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) < I + \frac{1}{j}$. Zu jedem j existiert a_j mit $|a_j| = I + \frac{1}{j}$ und $z + a_j w_j \notin \Omega$. Ohne Einschränkung konvergieren beide Folgen.

Wir zeigen die Behauptung für jedes δ_w. O.E. ist $w = (1, 0, \dots, 0)$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei D_k der Polyzylinder

$$D^k = B_1(0) \times \prod_{j=2}^{n} B_{1/k}(0).$$

Dann konvergiert die Folge $\triangle_\Omega^{D^k}$ monoton wachsend gegen δ_w. Wegen des Satzes von Dini ist die Konvergenz gleichmäßig, es gibt also zu vorgelegtem ϵ ein k, so dass

$$|f(z)| \leq (1 + \epsilon) \triangle_\Omega^{D^k}(z), \qquad z \in K.$$

Da die Taylorreihe von f in $\zeta + \triangle_\Omega^{D^k} D_k$ konvergiert und nach Voraussetzung diese Menge in Ω liegt, gilt $\triangle_\Omega^{D^k} D^k \leq \delta_w$ und wir sind fertig. □

2.13 Korollar. *Es gilt* $\inf\{\delta(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) | z \in K\} = \inf\left\{\delta(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \middle| z \in \hat{K}_\Omega\right\}$.

Beweis. Verwende das Theorem für konstante f. □

2.14 Theorem. *Es sei Ω offen im $\mathbb{C}^n$. Dann sind äquivalent:*

(a) Ω ist ein Holomorphiegebiet.

(b) Wenn $K \subset \Omega$ kompakt ist, dann ist auch $\hat{K}_\Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω und für jedes $f \in A(\Omega)$ gilt

$$\sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)} = \sup_{z \in \hat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)}.$$

(c) Wenn $K \subset \Omega$ kompakt ist, dann ist auch $\hat{K}_\Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω.

(d) Es gibt $f \in A(\Omega)$, so dass es keine offenen Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ gibt, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$.

(ii) Ω_2 *ist zusammenhängend und ungleich* Ω.

(iii) Es gibt keine Funktion $u_2 \in A(\Omega_2)$, *so dass* $f = u_2$ *in* Ω_1.

Beweis. Wir müssen nur noch (c) $\Rightarrow$ (d) zeigen. Es sei D ein Polyzylinder mit Zentrum im Ursprung und für $\zeta \in \Omega$ bezeichne D_ζ den größten Polyzylinder der Form $\zeta + rD$, der noch in Ω enthalten ist. Es sei M eine abzählbare dichte Teilmenge in Ω. Dazu wählen wir eine Folge $(\zeta_1, \zeta_2, \dots)$ in M, die jedes Element von M unendlich oft enthält. Es sei $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Nach Voraussetzung ist $(\hat{K}_j)_\Omega$ kompakt in Ω. Es gibt also $z_j \in D_{\zeta_j}$ mit $z_j \notin (\hat{K}_j)_\Omega$. Es gibt also $f_j \in A(\Omega)$ mit $f_j(z_j) = 1$ und $\sup_{z \in K_j} |f_j(z| < 1$. Wenn man f_j durch eine ausreichend hohe Potenz ersetzt, kann man erreichen, dass $\sup_{z \in K_j} |f_j(z)| \leq 2^{-j}$. Daher konvergiert das unendliche Produkt

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - f_j)^j \, .$$

In z_j verschwinden alle Ableitungen von f der Ordnungen $< j$. Hat man jetzt Ω_1 und Ω_2 wie oben beschrieben, dann liegt ein ζ_k in Ω_1. Dazu gehören unendlich viel ζ_j, die sich in einem Randpunkt ζ häufen. Weil alle Ableitungen stetig sind, verschwindet u_2 dort von jeder Ordnung. Das kann nicht sein, weil f auf keiner offenen Menge identisch verschwindet. $\square$

2.15 Korollar. *Konvexe Mengen sind Holomorphiegebiete.*

3 Subharmonische Funktionen

3.1 Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ eine Funktion.

(a) u heißt *oberhalbstetig,* wenn für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in \Omega | u(z) < s\}$ offen ist.

(b) u heißt *subharmonisch,* wenn u oberhalbstetig ist und für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ und jede im Inneren von K harmonische Funktion $h \in C(K)$, die auf dem Rand von K größer oder gleich u ist, bereits $u \leq h$ in Ω gilt.

3.2 Beispiel. Harmonische Funktionen sind subharmonisch. Alle konstanten Funktionen, auch die Konstante $-\infty$, sind subharmonisch. Den letzten Punkt sehen viele Autoren anders.

3.3 Bemerkung. (a) Nach Satz 6.8 der Analysis III ist eine Abbildung genau dann messbar, wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x | f(x) < \alpha\}$ messbar ist. Insbesondere sind oberhalbstetige Funktionen Borel-messbar.

(b) Oberhalbstetige Funktionen sind lokal nach oben beschränkt.

Beweis. Sei $K \subseteq X$ kompakt. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $G_m := \{x \in X | u(x) < m\}$ offen und es gilt $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$. Also existiert M mit $K \subseteq G_M$. □

3.4 Lemma. *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und es sei $u\colon X \to [-\infty, \infty[$ oberhalbstetig und nach oben beschränkt. Dann existiert eine fallende Folge $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq u$ nach oben beschränkter, stetiger Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert.*

Insbesondere gilt für jedes beschränkte Borelmaß μ

$$\int u \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$f_n(x) = \sup_{y \in X} \left(u(y) - n|x - y| \right).$$

Dann hat man jedenfalls eine fallende Folge durch $C := \sup u$ beschränkter Funktionen. Um die Stetigkeit von f_n zu zeigen, seien $\epsilon > 0$ und x_1, x_2 mit $|x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{n}$ vorgegeben. Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt für jedes y

$$u(y) - n|x_1 - y| < u(y) - n|x_2 - y| + \epsilon$$

und daher $f(x_1) \leq f(x_2) + \epsilon$. Nun vertauschen wir x_1 und x_2.

Die punktweise Konvergenz von $(f_j)_j$ gegen u zeigen wir zuerst im Fall $u(x) > -\infty$. Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass $u(y) < u(x) + \epsilon$ für alle y mit $|x - y| < \delta$. Wir wählen n so groß, dass $C - \delta n < u(x)$. Für y mit $|x - y| \geq \delta$ gilt dann

$$u(y) - n|x - y| \leq C - \delta n < u(x).$$

Da $f_n(x) \geq u(x)$ nach Definition, folgt aus dieser Abschätzung, dass bei der Definition von f_n nur y mit $|x - y| < \delta$ berücksichtigt werden müssen. Also

$$u(x) \leq f_n(x) \leq \sup_{|x-y|<\delta} u(y) - n|x - y| \leq u(x) + \epsilon.$$

Im Fall $u(x) = -\infty$ sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert $\delta > 0$, so dass $u(y) < -N$ für alle y mit $|x - y| < \delta$. Für jedes n mit $C - n\delta \leq -N$ hat man dann $f_n(x) \leq -N$, indem man die beiden Fälle $|x - y|y\delta$ und $\geq \delta$ wieder getrennt bearbeitet. □

3.5 Satz. *(a) Wenn u subharmonisch und $c > 0$, dann ist auch cu subharmonisch.*

(b) Wenn $u_1, \ldots, u_n$ subharmonisch, dann auch $\max(u_1, \ldots u_n)$.

(c) Wenn u_α für jedes $\alpha \in A$ subharmonisch ist und $\sup_{\alpha \in A} u_\alpha$ oberhalbstetig und überall endlich ist, dann ist $\sup_{\alpha \in A} u_\alpha$ subharmonisch.

(d) Wenn $u_1 \geq u_2 \geq \ldots$ eine absteigende Folge von subharmonischen Funktionen ist, dann ist ihr Grenzwert subharmonisch.

Beweis. Die ersten drei Aussagen sind klar. Beim Beweis von (d) sei $u := \lim_{n\to\infty} u_n$. Die Oberhalbstetigkeit von u ist leicht zu sehen, denn $\{u < s\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u_n < s\}$. Für h wie in der Definition und $\epsilon > 0$ sind die Mengen $A_j := \{z \in \partial K | u_j(z) \geq h(z) + \epsilon\}$ kompakt. Da ihr Durchschnitt leer ist, sind sie ab einem gewissen j_0 alle leer. Also $u \leq u_{j_0} \leq h + \epsilon$. □

3.6 Lemma. *Es seien K ein kompakter topologischer Raum und $u\colon K \to [-\infty, \infty[$ oberhalbstetig. Dann nimmt u ihr Supremum auf K an.*

Beweis. Sei $M := \sup u(K)$. Für jedes $\epsilon > 0$ ist $A_\epsilon := \{z | u(z) \geq M - \epsilon\}$ nicht-leer und abgeschlossen. Also ist auch der Durchschnitt nicht leer. □

3.7 Theorem. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ oberhalbstetig. Dann sind äquivalent:*

(a) u ist subharmonisch.

(b) Für jedes $\delta > 0$, jedes $z \in \Omega$ mit $\overline{B}_\delta(z) \subset \Omega$ und jedes endliche Maß μ auf $[0, \delta]$ gilt

$$2\pi u(z)\mu([0,\delta]) \leq \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} u(z + re^{i\theta})\, d\mu(r)\, d\theta. \tag{3.1}$$

(c) Für jedes $\delta > 0$ und jedes $z \in \Omega$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > \delta$ gibt es ein endliches Borelmaß μ auf $[0, \delta]$ mit $\mu(]0, \delta]) > 0$, so dass (3.1) gilt.

Beweis. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) ist klar.

Wir zeigen (a) $\Rightarrow$ (b). In den Übungen haben wir den Spezialfall $\mu = \delta_r$ für hinreichend kleines $r > 0$ betrachtet. Das bedeutet für jedes r

$$2\pi u(z) \leq \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}\, d\theta.$$

Wir integrieren nun beide Seiten nach μ.

Wir zeigen (c) $\Rightarrow$ (a). Es sei $H \subset \Omega$ kompakt und es sei $h \in C(K)$ harmonisch im Innern von K und $\geq u$ in ∂K. Es seien $v := u - h$ und $M := \sup v(K)$. Wir nehmen zum Widerspruch $M > 0$ an. Wegen des Lemmas ist $F := \{z | u(z) = M\}$ eine nicht-leere, kompakte Teilmenge von K, die wegen der Wahl von h im Innern von K liegt. Es sei z Randpunkt von F mit minimalem Abstand zu ∂K, es sei $w \in \partial K$ ein Punkt mit $\operatorname{dist}(z, \partial K) = |z - w|$ und es sei $0 < \delta < |z - w|$. Ist jetzt μ ein Maß wie in (d), dann existiert ein $r_0 \in]0, \delta]$ im Träger von μ. Der Schnitt von $\partial B_{r_0}(z)$ mit der Verbindungsstrecke von z und w bestehe aus dem Punkt z_0. Dieser Punkt liegt näher an ∂K als z, also liegt er nicht in F. Da F abgeschlossen ist, liegt eine Umgebung von z_0 nicht in F. Da das Produktmaß auf der rechten Seite von (3.1) Masse in z_0 besitzt, ist die rechte Seite echt kleiner als $2\pi M$, während die linke gleich $2\pi M$ ist. Dies ist ein Widerspruch. □

Übung: Identitätssatz

3.8 Korollar. *(a) Endliche Summen subharmonischer Funktionen sind subharmonisch.*

(b) Subharmonizität ist eine lokale Eigenschaft.

3.9 Korollar. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und es sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $\log|f|$ subharmonisch.*

Beweis. Wir müssen (c) zeigen. Wenn $f(z) \neq 0$, dann ist $\log|f| = \operatorname{Re}\log f(z)$, also harmonisch in einer Umgebung von z. Im Fall $f(z) = 0$ ist (3.1) sowieso klar. □

3.10 Theorem. *Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und wachsend und es sei $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ subharmonisch. Dann ist $\varphi \circ u$ subharmonisch.*

Beweis. φ ist streng wachsend außer möglicherweise auf einem Intervall der Form $]-\infty, c]$, auf dem φ konstant ist. Daher ist $\varphi \circ u$ oberhalbstetig.

Für x_0 beliebig existiert mindestens ein $k \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + k(x - x_0)$. (Wenn φ in x_0 differenzierbar ist, dann $k = \varphi'(x)$.) Wir wenden diese Ungleichung unter dem Integral an und erhalten

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u(z + re^{i\theta}))\, d\theta \leq \varphi(x_0) + k\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta - x_0\right).$$

Weil u subharmonisch und φ monoton ist, ist die linke Seite größer oder gleich $\varphi(u(z))$. □

3.11 Satz. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet und es sei* $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ *subharmonisch und nicht konstant gleich* $-\infty$. *Dann* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Beweis. Es sei $E := \{z \in \Omega | u \text{ integrierbar in Umgebung von } z\}$. Diese Menge ist offen in Ω. Wir zeigen, dass auch ihr Komplement offen ist. Sei dazu $z \in \Omega \setminus E$ und sei $B_{2\delta}(z) \subset \Omega$. Wir wollen zeigen, dass $u \equiv -\infty$ in $B_\delta(z)$ und nehmen zum Widerspruch an, dass es $w \in B_\delta(z)$ mit $u(w) \neq -\infty$ gibt. Dann $\overline{B}_\delta(w) \subset \Omega$ und aus der Mittelwerteigenschaft folgt

$$-\infty < u(w)\lambda_2(B_\delta(w)) \leq \int_{B_\delta(w)} u(\zeta)\, d\lambda_2(\zeta).$$

Da u auf $\overline{B}_\delta(w)$ nach oben beschränkt ist, ist u in $B_\delta(w)$ integrierbar. Das ist aber eine Umgebung von z.

Da Ω ein Gebiet ist, haben wir $E = \Omega$ gezeigt. □

Satz 3.11 erlaubt es uns, u als Distribution zu verstehen.

3.12 Theorem. *Eine Funktion* u *ist genau dann subharmonisch, wenn* $\Delta u \geq 0$ *in dem Sinn, dass* $(\Delta u, \varphi) \geq 0$ *für jede Testfunktion* $\varphi \geq 0$.

Wir zeigen eine Richtung wie behauptet, die andere aber nur für den C^2-Fall. Durch partielle Integration ist außerdem klar, dass $\Delta u \geq 0$ für eine C^2-Funktion genau dann im Distributionssinn gilt, wenn die Ungleichung punktweise gilt.

3.13 Satz. *Sei* $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ *subharmonisch. Dann* $\Delta u \geq 0$.

Beweis. Für $z \in \Omega$ und hinreichend kleines r multiplizieren wir die Ungleichung

$$2\pi u(z) \leq \int_0^1 u(z + re^{i\theta})d\theta$$

mit v und integrieren über z. Dann

$$\int_\Omega u(z)\left(\int_0^{2\pi} v(z - re^{i\theta})d\theta - 2\pi v(z)\right) d\lambda_2(z) \geq 0.$$

Jetzt beachtet man

$$\begin{aligned}v(z+re^{i\theta} &= v(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) = v(z)+r\cos\theta v_x + r\sin\theta v_y\\ &\quad + \frac{r^2}{2}\cos^2\theta v_{xx} + r^2\sin\theta\cos\theta v_{xy} + \frac{r^2}{2}\sin^2\theta v_{yy} + O(r^3).\end{aligned}$$

Der absolute und der lineare Term des Integrals verschwinden. Dann liefert Division durch r^2 die Behauptung. □

Von der Rückrichtung zeige ich nur:

3.14 Theorem. *Es sei* $u \in C^2(\Omega)$ *mit* $\Delta u \geq 0$. *Dann ist* u *subharmonisch.*

Beweis. In Polarkoordinaten haben wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) u(z+re^{t\theta}) \geq 0.$$

Über diese Ungleichung führen wir das Integral $\int_0^{2\pi} d\theta$ aus. Dann verschwindet der Term mit der θ-Ableitung und wir erhalten für die Funktion

$$M(r) := \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})\, d\theta$$

die Ungleichung $M''(r) + \frac{1}{r}M'(r) \geq 0$. Das ist die Ableitung von $rM'(r)$. Daher ist $rM'(r)$ wachsend. An der Stelle 0 hat sie den Wert 0, also ist $M' \geq 0$. Das war zu zeigen. □

Im allgemeinen Fall muss man wie folgt formulieren:

3.15 Theorem. *Es sei* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *mit* $\Delta u \geq 0$ *im Distributionssinn. Dann gibt es genau eine subharmonische Funktion* U *in* Ω, *die fast überall mit* u *übereinstimmt. Für ein beliebiges, radiales* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ *mit* $0 \leq \varphi$ *und* $\int \varphi = 1$ *gilt*

$$U(z) = \lim_{\delta\searrow 0}\int_{\mathbb{C}} u(z-\delta w)\varphi(w)\, d\lambda_2(w).$$

Später brauchen wir doch noch eine weitere Charakterisierung der subharmonischen Funktionen.

3.16 Satz. $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ *sei oberhalbstetig. Dann ist* u *genau dann subharmonisch, wenn für jede abgeschlossene Scheibe* D *in* Ω *und jedes holomorphe Polynom* f *aus* $u \leq \operatorname{Re} f$ *in* ∂D *bereits* $u \leq \operatorname{Re} f$ *in* D *folgt.*

Beweis. "$\Rightarrow$" ist klar. Zum Beweis der Rückrichtung müssen wir in jedem $z \in \Omega$ die Mittelwerteigenschaft für ein geeigneten Kreis zeigen. Ohne Einschränkung sei $z = 0$ und es gelte $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Nach Lemma 3.4 existiert eine fallende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger

Funktionen, die punktweise gegen u konvergiert. Seien $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen des Satzes von Stone-Weierstraß existiert ein Polynom $g(e^{i\theta}) = \sum_{k=-K}^{K} a_k e^{ik\theta}$ mit $\sup_{|z|=1} |u_n(z) - g(z)| < \epsilon$. Dann gilt auch $\sup_{|z|=1} |u_n(z) - \operatorname{Re} g(z)| < \epsilon$. Für $z = e^{i\theta}$ gilt

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{K} a_k z^k + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{K} a_{-k} \bar{z}^k = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{K} a_k z^k + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{K} \bar{a}_{-k} z^k.$$

Dies ist der Realteil eines holomorphen Polynoms f mit $\operatorname{Re} f \geq u_n - \epsilon \geq u - \epsilon$. Nach Voraussetzung gilt

$$u(0) \leq \epsilon + \operatorname{Re} f(0) = \epsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta})\, d\theta \leq 2\epsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Da dies für alle ϵ gilt, haben wir

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Mit dem Satz von Beppo Levi folgt die Behauptung. □

3.17 Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Menge M heißt *polar* in Ω, wenn es eine subharmonische Funktion $u \not\equiv -\infty$ gibt mit $u(x) = -\infty$ für alle $x \in M$.

3.18 Beispiel. (a) Wenn M einen inneren Punkt enthält, dann ist M nicht polar. Das folgt sofort aus Satz 3.11.

(b) In den Übungen wurde gezeigt, dass es in $\mathbb{D}$ eine dichte, polare Teilmenge gibt.

4 Plurisubharmonische Funktionen

4.1 Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ heißt *plurisubharmonisch,* falls gilt:

(a) u ist oberhalbstetig.

(b) Für alle Wahlen von $z \in \Omega$ und $w \in \mathbb{C}^n$ ist die Funktion $\tau \mapsto u(z + \tau w)$ subharmonisch dort, wo sie definiert ist.

Die Menge aller plurisubharmonischen Funktionen schreiben wir als $\mathrm{PSH}(\Omega)$.

4.2 Bemerkung. (a) Für $f \in A(\Omega)$ ist $\log|f|$ plurisubharmonisch.

(b) Der Grenzwert eine absteigenden Folge von plurisubharmonischen Funktionen ist plurisubharmonisch.

4.3 Theorem. *Eine Abbildung $u \in C^2(\Omega)$ ist genau dann plurisubharmonisch, wenn*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\, w_j \overline{w}_k \geq 0 \textit{ für alle } z \in \Omega,\ w \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Auf der linken Seite der Gleichung steht der Laplace-Operator, angewandt auf $\tau \mapsto u(z + w\tau)$. □

4.4 Theorem. *Die Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ verschwinde für $|z| > 1$, nehme nur nicht-negative Werte an und hänge nur von den Beträgen $|z_1|, \dots, |z_n|$ ab. Ferner gelte $\int_{\mathbb{C}^n} \varphi \, d\lambda_{2n} = 1$. Für $\epsilon > 0$ sei $\Omega_\epsilon := \{z \in \Omega | \mathrm{dist}(z, \Omega^c) > \epsilon\}$ und*

$$u_\epsilon(z) = \int_{\mathbb{C}^n} u(z - \epsilon\zeta)\varphi(\zeta)\, d\lambda_{2n}(\zeta), \quad z \in \Omega_\epsilon.$$

Dann $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, u_ϵ ist plurisubharmonisch und $\lim_{\epsilon \searrow 0} u_\epsilon = u$ punktweise.

4.5 Theorem. *Es seien $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ offen und es $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorph. Für jedes $u \in \mathrm{PSH}(\Omega_2)$ gilt $u \circ f \in \mathrm{PSH}(\Omega_1)$.*

Beweis. Für u von der Klasse C^2 folgt die Behauptung sofort aus Theorem 4.3. Den allgemeinen Fall führt man mit Theorem 4.4 auf diesen zurück. □

4.6 Theorem. *Es sei Ω ein Holomorphiegebiet und es sei $\delta(z, \Omega^c)$ wie in Theorem 2.12. Dann ist $-\log \delta(z, \Omega^c)$ plurisubharmonisch und stetig.*

Beweis. Seien $z_0 \in \Omega$ und $w \in \mathbb{C}^n$. Ferner sei $r > 0$ so klein, dass

$$D := \{z_0 + \tau w \mid |\tau| \leq r\} \subset \Omega$$

und sei f ein analytisches Polynom, so dass

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \Omega^c) \leq \operatorname{Re} f(\tau), \quad |\tau| = r.$$

Dann gibt es ein analytisches Polynom F in $\mathbb{C}^n$ mit $F(z_0 + \tau w) = f(\tau)$. Das bedeutet

$$e^{-F(z)} \leq \delta(z, \Omega^c) \text{ für } z \in \partial D.$$

Da D wegen des Maximumprinzips in der holomorph konvexen Hülle von ∂D liegt, gilt $e^{-F(z)} \leq \delta(z, \Omega^c)$ sogar für alle $z \in D$. □

4.7 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Die $PSH(\Omega)$-*Hülle* von K ist

$$\hat{K}^P_\Omega = \left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \forall u \in PSH(\Omega) : u(z) \leq \sup_{\zeta \in K} u(z) \right\}.$$

4.8 Bemerkung. Die $PSH(\Omega)$-Hülle ist enthalten in der $A(\Omega)$-Hülle.

4.9 Theorem. *Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sind äquivalent:*

(a) Für jedes δ wie in Theorem 2.12 ist $-\log \delta(z, \Omega^c)$ plurisubharmonisch.

(b) Es gibt ein δ wie in Theorem 2.12, für welches $-\log \delta(z, \Omega^c)$ plurisubharmonisch ist.

(c) Es gibt eine stetige plurisubharmonische Funktion u in Ω, so dass

$$\Omega_c := \{z \in \Omega \mid u(z) < c\} \Subset \Omega.$$

(d) Für jedes kompakte Teilmenge K von Ω gilt $K^P_\Omega \Subset \Omega$.

Beweis. (a) "⇒" (b) und (c) "⇒" (d) sind klar.

(b) "⇒" (c): Die Funktion $u(z) := |z|^2 - \log \delta(z, \Omega^c)$ tut's.

(d) "⇒" (a): Es seien $z_0 \in \Omega$, $0 \neq w \in \mathbb{C}^n$ und $r > 0$ gegeben, so dass $D := \{z_0 + \tau w \mid |\tau| \leq r\} \subset \Omega$. Sei nun f ein holomorphes Polynom, so dass

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \Omega^c) \leq \operatorname{Re} f, \quad |\tau| = r.$$

Das scheiben wir um zu

$$\delta(z_0 + \tau w, \Omega^c) \geq \left| e^{-f(\tau)} \right|, |\tau| = r.$$

Um diese Abschätzung für $|\tau| < r$ zu zeigen, fixieren wir vorerst ein $a \in \mathbb{C}^n$ mit $\delta(a) < 1$ und setzen für $0 \leq \lambda \leq 1$

$$D_\lambda := \left\{ z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} \,\middle|\, |\tau| \leq r \right\}$$

und

$$\Lambda := \{\lambda \in [0,1] | D_\lambda \subset \Omega\}.$$

Wir wollen $\Lambda = [0,1]$ zeigen. Wegen $D_0 = D$ ist $\Lambda \neq \emptyset$ und offen. Um zu zeigen, dass Λ abgeschlossen ist, setzen wir

$$K := \left\{z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} \middle| |\tau| = r,\, 0 \leq \lambda \leq 1\right\}.$$

Wegen der Wahl von f gilt $K \subset \Omega$. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ wollen wir $D_\lambda \subset \hat{K}^P_\Omega$ zeigen. Um das zu tun, seien $u \in PSH(\Omega)$ und $\lambda \in \Lambda$ vorgegeben. Dann ist die Funktion

$$\tau \mapsto u(z_0 + \tau w + a e^{-f(\tau)})$$

subharmonisch in einer Umgebung von $\{|\tau| \leq r\}$. Daher gilt

$$u(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}) \leq \sup_{z \in K} u(z), \quad |\tau| \leq r,$$

indem man in der Definition subharmonischer Funktionen eine konstante Vergleichsfunktion verwendet. Da diese Abschätzung für alle u gilt, haben wir $D_\lambda \subset \hat{K}^P_\Omega$ gezeigt.

Bei kleinen Änderungen von λ bleibt D_λ in einer ϵ-Umgebung von $\hat{K}^P_\Omega$. Wenn jetzt $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Λ ist, die gegen λ_0 konvergiert, dann liegt für jedes τ die Folge $(z_0 + \tau w + \lambda_j a e^{-f(\tau)})_{j\in\mathbb{N}}$ in $\hat{K}^P_\Omega$. Ihr Grenzwert liegt also in $\overline{\hat{K}^P_\Omega} \subset \Omega$. Also $D_{\lambda_0} \subset \Omega$, was wir zeigen wollten.

Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt $\Lambda = [0,1]$ und daher $D_1 \subset \Omega$. Wir nehmen zum Widerspruch die Existenz eines τ mit $|\tau| < r$ an, für welches

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \Omega^c) > \operatorname{Re} f(\tau)$$

an. Dann existiert $\alpha \in \Omega^c$, so dass

$$\delta(z_0 + \tau w - \alpha) < e^{-\operatorname{Re} f(\tau)}.$$

Setzen wir $a := (\alpha - z_0 - \tau w)e^{f(\tau)}$, so gelten $\delta(a) < 1$ und $z_0 + \tau w + a e^{-\operatorname{Re} f(\tau)} = \alpha \notin \Omega$. Andererseits liegt dieser Punkt aber in D_1. □

4.10 Definition. Eine offene Menge mit den Eigenschaften aus Theorem 4.9 heißt *pseudokonvex.*

4.11 Lemma. *Es sei* $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *konvex und wachsend. Dann ist* $u\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $u(z) := f(|z|^2)$, *plurisubharmonisch.*

Beweis. Übung □

4.12 Theorem. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *offen und beschränkt. Wenn jeder Punkt in* $\partial\Omega$ *eine Umgebung* U *besitzt, so dass* $U \cap \Omega$ *pseudokonvex ist, dann ist* Ω *pseudokonvex.*

Beweis. Für $z_0 \in \partial\Omega$ sei U wie in der Voraussezung. Da für z, die hinreichend nahe an z_0 liegen, bereits $\delta(z, \Omega^c) = \delta(z, (U \cap \Omega)^c$ gilt, ist $-\log \delta(z, \Omega^c)$ in einer Umgebung von z_0 plurisubharmonisch. Daher existiert eine abgeschlossenen Menge $F \subset \Omega$, so dass $-\log \delta(\cdot, \Omega^c)$ plurisubharmonisch in $\Omega \setminus F$ ist. Da Ω beschränkt ist, ist F sogar kompakt und mit dem Lemma erhält man eine plurisubharmonische Funktion φ mit $\varphi \geq -\log \delta(\cdot, \Omega^c)$ in F. Dann ist

$$u(z) := \sup\left(\varphi(z), -\log \delta(z, \Omega^c)\right)$$

plurisubharmonisch und erfüllt die Bedingung (c) aus Theorem 4.9. □

Bemerkung. (a) Der Beweis funktioniert auch für unbeschränktes Ω. Man wählt dann als φ eine hinreichend schnell wachsende Funktion wie im Lemma.

(b) Aus dem Theorem folgt, dass Pseudokonvexität eine lokale Eigenschaft des Randes ist.

(c) Das *Levi-Problem* fragt, ob die Eigenschaft "Holomorphiegebiet" eine Eigenschaft des Randes ist. Wir werden später sehen, dass pseudokonvexe offene Mengen Holomorphiegebiete sind. (Die Umkehrung haben wir schon gezeigt.) Damit wird dann das Levi-Problem gelöst.

4.13 Theorem. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvex, es sei $K \subset \Omega$ kompakt und es sei U eine offene Umgebung von $\hat{K}^P_\Omega$. Dann existiert $u \in C^\infty(\Omega)$, so dass*

(a) u *ist* strikt plurisubharmonisch, *d. h. die hermitesche Form*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \bar{\partial} z_k} w_j \overline{w}_k$$

ist positiv definit.

(b) $u < 0$ *in* K *und* $u > 0$ *in* $\Omega \setminus U$.

(c) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{z \in \Omega | u(z) < c\} \Subset \Omega$.

Beweis. Theorem 2.6.11 in Hörmander. □

4.14 Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ beschränkt mit C^2-Rand. Genauer habe Ω die Gestalt $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n | \rho(z) < 0\}$ für eine eine Funktion ρ, die in einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ von der Klasse C^2 ist und deren Gradient in keinem Punkt des Randes verschwindet. Dann ist Ω genau dann pseudokonvex, wenn*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \bar{\partial} z_k} w_j \overline{w}_k \geq 0 \quad \textit{für alle } z \in \partial\Omega \textit{ mit } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_j} w_j = 0.$$

Beweis. Theorem 2.6.12 in Hörmander. □

Die Bedingung aus Theorem 4.14 bezeichnet man als *Levi-Bedingung.*

5 Zwei funktionalanalytische Lemmata

5.1 Lemma. *Es sei* T *ein dicht definierter, abgeschlossener Operator von einem Hilbertraum* H_1 *in einen Hilbertraum* H_2. *Es sei* F *ein abgeschlossener Unterraum von* H_2*, der* $\operatorname{Bild} T$ *umfasst. Dann sind gleichwertig*

(a) $F = \operatorname{Bild} T$.

(b) Es gibt $C > 0$*, so dass*

$$\|f\|_{H_2} \leq C\|T^*f\|_{H_1} \quad \textit{für alle } f \in F \cap D(T^*). \tag{5.1}$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Wir behaupten, dass

$$B := \{f \in F \cap D(T^*) | \|T^*f\|_{H_1} \leq 1\}$$

schwach beschränkt in F ist. Sei also $g \in F$. Wegen (a) existiert existiert $u \in D(T)$ mit $Tu = g$. Für alle $f \in B$ gilt dann

$$|(f, g)_{H_2}| = |(f, Tu)_{H_2}| = |(T^*f, u)_{H_1}| \leq \|u\|_{H_1}.$$

Daher ist B schwach beschränkt und wegen Korollar 9.20 der Einführung in die Funktionalanalysis ist B auch beschränkt in der Norm.

(b) $\Rightarrow$ (a): Wegen $D(T^*) = \{f \in H_2 | x \mapsto (Tx, f) \text{ stetig}\}$ gilt $F^\perp \subset D(T^*)$. Für $g \in F^\perp$ und alle $x \in D(T)$ gilt daher $(x, T^*g)_{H_1} = (Tx, g)_{H_2} = 0$. Da $D(T)$ dicht in H_1 ist, folgt $T^*|_{F^\perp} = 0$. Für gegebenes $f \in F$ ist daher ist die folgende Vorschrift wohldefiniert

$$\varphi\colon \operatorname{Bild} T^* \to \mathbb{K}, \quad T^*h \mapsto (h, f)_{H_2}.$$

Wegen (5.1) gilt $|\varphi(T^*h)| \leq C\|h\|_{H_2}\|T^*f\|_{H_1}$ und daher $\varphi \in (\operatorname{Bild} T^*)'$. Das setzt sich zu $\widetilde{\varphi} \in \overline{\operatorname{Bild} T^*}'$ fort. Wegen des Rieszschen Darstellungssatzes existiert $u \in \overline{\operatorname{Bild} T^*}$, so dass $\widetilde{\varphi}(x) = (x, u)$ für alle $x \in \operatorname{Bild} T^*$. Insbesondere gilt für jedes $h \in D(T^*)$

$$(h, f)_{H_2} = \varphi(T^*h) = (T^*h, u)_{H_1}.$$

Die Gleichung zeigt zunächst, dass $u \in D(T^{**})$ und wegen $T^{**} = T$ dann auch dass $Tu = f$. $\square$

5.2 Lemma. *Es sei* T *ein dicht definierter, abgeschlossener Operator von einem Hilbertraum* H_1 *in einen Hilbertraum* H_2 *und es sei* F *ein abgeschlossener Unterraum von* H_2*, der* $\operatorname{Bild} T$ *umfasst. Falls* (5.1) *gilt, dann gibt es zu jedem* $v \in (\ker T)^\perp$ *ein* $f \in D(T^*)$ *mit* $T^*f = v$ *und*

$$\|f\|_{H_2} \leq C\|v\|_{H_1}. \tag{5.2}$$

Beweis. Beim Beweis des letzten Lemmas hatten wir uns schon überlegt, dass $F^\perp \subset \ker T^*$ und dass daher $\operatorname{Bild} T^* = \{T^* f | f \in D(T^*) \cap F\}$. Wir zeigen zuerst, dass $\operatorname{Bild} T^*$ abgeschlossen ist. Dazu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(T^*) \cap F$, für welche $(T^* f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H_1 konvergiert. Der Grenzwert heiße u. Wir müssen zeigen, dass $u \in \operatorname{Bild} T^*$. Wegen (5.1) ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jedenfalls eine Cauchyfolge in F, besitzt also einen Grenzwert f. Die Folge $((f_n, T^* f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ liegt im Graphen von T^* und konvergiert in $H_2 \times H_1$ gegen (f, u). Da T^* abgeschlossen ist, folgt $u = T^* f \in \operatorname{Bild} T^*$.

Es gilt $\ker T = (\operatorname{Bild} T^*)^\perp$ nach Satz 18.11 der Einführung in die Funktionalanalysis, angewandt auf T^*. Also $v \in \overline{\operatorname{Bild} T^*} = \operatorname{Bild} T^*$. Die Abschätzung folgt nun aus (5.1). □

6 Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung

6.1 Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen.

(a) Für $\varphi \in C(\Omega)$ bezeichnen wir mit $L^2(\Omega, \varphi)$ den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen zum Maß $e^{-\varphi}\lambda_{2n}$.

(b) Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$ den Raum der (p, q)-Formen, deren Koeffizienten in $L^2(\Omega, \varphi)$ liegen. Wir schreiben diese Differentialformen als

$$f = {\sum_{|I|=p}}' {\sum_{|J|=q}}' f_{I,J}\, dz^I \wedge d\overline{z}^J,$$

wobei die Apostrophe an den Summen bedeuten, dass nur über aufsteigende Folgen von Indices summiert wird. Setzt man

$$|f|^2 := {\sum_{I,J}}' |f_{I,J}|^2,$$

so gilt

$$\|f\|^2_\varphi := \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda_{2n}.$$

(c) Der Raum $\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$ besteht aus denjenigen (p, q)-Formen, deren Koeffizienten in Testfunktionen sind.

6.2 Bemerkung. (a) Die Räume $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$ sind Hilberträume.

(b) $\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$ ist dicht in $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$.

6.3 Bezeichnung. Für $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\Omega)$ und $p, q \in \mathbb{N}_0$ definieren wir nun einen Operator T von $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi_1)$ nach $L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi_2)$. Sei Definitionsbereich $D(T)$ besteht aus allen $u \in L^2_{p,q}(\Omega, \varphi_1)$, für die $\overline{\partial}u \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi_2)$. Für diese u setzen wir $Tu = \overline{\partial}u$. Wenn nötig, schreiben wir $T_{p,q,\varphi_1,\varphi_2}$ für T.

Der Operator T ist dicht definiert und abgeschlossen.

6.4 Lemma. *Es sei* $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ *eine kompakte Ausschöpfung. Für* $j \in \mathbb{N}$ *sei* $\eta_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ *eine Funktion mit* $0 \leq \eta_j \leq 1$ *und* $\eta_j(z) = 1$ *für alle* $z \in K_j$. *Ferner gebe es* $\varphi_1, \varphi_3 \in C(\Omega)$ *und* $\varphi_2 \in C^1(\Omega)$, *so dass*

$$e^{-\varphi_{j+1}} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \overline{z}_k} \right|^2 \leq e^{-\varphi_j}, \quad j = 1, 2,\ \nu \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ *seien* $T := T_{p,q,\varphi_1,\varphi_2}$ *und* $S := T_{p,q+1,\varphi_2,\varphi_3}$. *Dann ist* $\mathcal{D}_{p,q+1}(\Omega)$ *dicht in* $D(T^*) \cap D(S)$*, versehen mit der Norm*

$$\|f\| := \|f\|_{\varphi_2} + \|T^*f\|_{\varphi_1} + \|Sf\|_{\varphi_3}.$$

Beweis. Lemma 4.1.3 in Hörmander. □

6.5 Lemma. *Für*

$$f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q+1}{}' f_{I,J}\, dz^I \wedge d\overline{z}^J \in D(T^*)$$

gilt

$$T^*f = (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} \sigma(jK) e^{\varphi_1} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(e^{-\varphi_2} f_{I,jK}\right) dz^I \wedge d\overline{z}^K,$$

wobei für $K = (k_1, \dots, k_q)$ *mit* jK *die monotone Anordnung von* $\widetilde{jK} := (j, k_1, \dots, k_q)$ *bezeichnet wird und* $\sigma(jK)$ *definiert ist durch* $d\overline{z}^{\widetilde{jK}} = \sigma(jK)\, d\overline{z}^{jK}$.

Beweis. Für

$$u = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' u_{I,J}\, dz^I \wedge d\overline{z}^K \in \mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$$

gilt

$$\overline{\partial} u = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_{I,K}}{\partial \overline{z}_j}\, d\overline{z}_j \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^K = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' \sum_{j=1}^{n} (-1)^p \sigma(jK) \frac{\partial u_{I,K}}{\partial \overline{z}_j}\, dz^I \wedge d\overline{z}^{jK}.$$

Bei der Berechnung von T^*f müssen wir beachten, dass $\overline{\left(\frac{\partial u_{I,K}}{\partial \overline{z}_j}\right)} = \frac{\partial \overline{u}_{I,K}}{\partial z_j}$ und daher

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' &(T^*f)_{I,K} \overline{u}_{I,K} e^{-\varphi_1}\, d\lambda_{2n} \\
&= (T^*f, u)_{L^2_{p,q}(\Omega,\varphi_1)} \\
&= (f, Tu)_{L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi_2)} \\
&= \int_\Omega \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' \sum_{j=1}^{n} (-1)^p \sigma(jK) f_{I,jK} \overline{\left(\frac{\partial u_{I,K}}{\partial \overline{z}_j}\right)} e^{-\varphi_2}\, d\lambda_{2n} \\
&= (-1)^{p-1} \int_\Omega \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' \sum_{j=1}^{n} \sigma(jK) \frac{\partial}{\partial z_j} \left(e^{-\varphi_2 f_{I,jK}}\right) \overline{u}_{I,K} \lambda_{2n}.
\end{aligned}$$
□

6.6 Bemerkung. Für $f, g \in \mathcal{D}(\Omega)$ bekommt man

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z_j} f, g\right) = \int_\Omega f \frac{\partial}{\partial z_j} \left(g e^{-\varphi}\right).$$

Wenn δ_j die Adjungierte von $-\frac{\partial}{\partial z_j}$, dann gilt für $g \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\delta_j g = \frac{\partial g}{\partial z_j} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}.$$

6.7 Lemma.
$$\delta_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\delta_j = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}.$$

Wir wählen eine feste Funktion $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

6.8 Lemma. *Falls Ω pseudokonvex ist, so existiert $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, so dass*
$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \geq 2(|\bar{\partial}\psi|^2 + e^\psi) \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$
und $\{z \in \Omega | \varphi(z) < t\} \Subset \Omega$ für alle t.

Beweis. Wegen Theorem 4.13 existieren $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\Omega)$ und eine positive, stetige Funktion m, so dass
$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \geq m(z) \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$
und $\Omega_t := \{z \in \Omega | \widetilde{\varphi}(z) < t\} \Subset \Omega$ für alle t. Man wählt nun eine wachsende, konxexe C^∞-Funktion χ mit
$$\chi'(t) \geq 2 \sup_{z \in \Omega_t} \frac{|\bar{\partial}\psi(z)|^2 + e^\psi(z)}{m(z)}$$
und setzt $\varphi = \chi \circ \widetilde{\varphi}$. □

6.9 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvex und seien φ und ψ wie zuvor und seien $\varphi_j = \varphi - (3-j)\psi$, $j = 1, 2, 3$. Dann gibt es $C > 0$, so dass für alle $f \in \mathcal{D}_{(p,q+1)}$ gilt*
$$\|f\|^2_{\varphi_2} \leq C(\|T^*f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3}).$$

Beweis. Die Normen werden getrennt abgeschätzt. Der führende Term ist dann
$$\int_\Omega \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k=1}^{n} \left(\delta_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\delta_j\right) f_{I,jK} \bar{f}_{I,kK}.$$

Wegen der vorstehenden Bemerkung kann man die Pseudokonvexität nun nutzen. □

6.10 Theorem. *Unter den Voraussetzungen des Satzes gibt es zu jedem $f \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \varphi_2)$ mit $\bar{\partial}f = 0$ ein $u \in L^2_{p,q}(\Omega, \varphi_1)$ mit $\bar{\partial}u = f$.*

Beweis. Wegen $Sf = 0$ ist die Ungleichung (5.1) in $\mathcal{D}_{p,q+1}(\Omega)$ erfüllt. Wegen Lemma 6.4 folgt die Ungleichung auch in $D(T^*) \cap D(S)$. Nun folgt die Behauptung aus Lemma 5.1. □

6.11 Korollar. *Es sei f eine $(p, q+1)$-Form auf Ω mit Koeffizienten in $L^2_{loc}(\Omega)$, welche $\partial f = 0$ im distributionellen Sinn erfüllt. Dann gibt es eine (p, q)-Form u auf Ω mit Koeffizienten in $L^2_{loc}(\Omega)$, so dass $\bar{\partial}u = f$ im distributionellen Sinn.*

7 Regularität der Lösungen der $\overline{\partial}$-Gleichung

In diesem Abschnitt skizziere ich den Inhalt von §4.6 des Buchs *Function Theory of Several Complex Variables* von S. G. Krantz.

7.1 Beispiel. In der Übungen wird eine geschlossene $(0,2)$-Form f im $\mathbb{C}^2$ vorgestellt, so dass die Gleichung $\partial u = f$ sowohl unstetige als auch glatte Lösungen besitzt.

7.2 Lemma. $\mathcal{K} := \ker \overline{\partial}$ *ist abgeschlossen in* $L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)$.

Beweis. Übung $\square$

7.3 Definition. Es sei $P\colon L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi) \to \mathcal{K}$ die orthogonale Projektion. Wenn u eine Lösung von $\overline{\partial} u = f$ ist, dann auch $u - Pu$. Wir bezeichnen diese Lösung als *kanonische Lösung* (auch als *Kohnsche Lösung* bezeichnet). Die kanonische Lösung ist eindeutig.

7.4 Bezeichnung. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $H^k_{(p,q)}(\Omega)$ den Hilbertraum der (p,q)-Formen mit Koeffizienten im Sobolewraum $H^k(\Omega)$. Die analogen Vereinbarungen für gewichtete und lokale Hilberträume seien ebenfalls getroffen.

7.5 Theorem. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *pseudokonvex und sei* $k \in \mathbb{N}_0$*. Für* $f \in H^k_{(p,q+1)}(\Omega)_{\mathrm{loc}}$ *gelte* $\overline{\partial} f = 0$*. Dann gilt* $u \in H^{k+1}_{(p,q)}(\Omega)_{\mathrm{loc}}$ *für die kanonische Lösung* u *von* $\overline{\partial} u = f$.

Krantz schreibt, dass die kanonische Lösung unabhängig von der Sobolewordnung ist. Daher gilt das Theorem auch für C^∞-Koeffizienten.

7.6 Lemma. $f \in L^2(\Omega)$ *habe kompakten Träger und es gelte* $\frac{\partial u}{\partial z_j} \in L^2(\Omega)$ *für* $j = 1, \dots, n$*. Dann* $u \in H^1(\Omega)$ *und*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

für $j = 1, \dots, n$.

Beweis. Wir brauchen nur die Gleichung für $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial z_j} \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z_j} \right)} = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}_j} = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}_j \partial z_j} \overline{u} = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_j} \overline{u} \\ &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} \right)} = \left\| \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

$\square$

7.7 Theorem. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *pseudokonvex und sei* $k \in \mathbb{N}_0$. *Für* $f \in H^k_{(p,1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ *gelte* $\overline{\partial} f = 0$. *Dann gilt* $u \in H^{k+1}_{(p,0)}(\Omega, \mathrm{loc})$ *für jedes Lösung von* $\overline{\partial} u = f$.

Beweis. Wir machen das für $p = 0$ und $f = 0$ und alle k. (D. h. wir zeigen, dass der $\overline{\partial}$-Operator hypoelliptisch ist. In der Tat ist er sogar elliptisch.) Dazu wählen wir $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ beliebig. Dann

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}(\eta u) = \eta \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} + u \frac{\partial \eta}{\partial \overline{z}_j} = u \frac{\partial \eta}{\partial \overline{z}_j}$$

im Distributionssinn. Die rechte Seite liegt in $L^2(\mathbb{C}^n)$. Nach dem Lemma liegt dann auch $\frac{\partial}{\partial z_j}(\eta u)$ in $L^2(\mathbb{C}^n)$. Das kann man für jede Distributionsordnung so machen, indem man mit den $\overline{\partial}$-Ableitungen beginnt und sie der Reihe nach mit dem Lemma und dem Satz von H. A. Schwarz in ∂-Ableitungen verwandelt. □

8 Lösung des Levi-Problems

Wieder nach Krantz.

8.1 Theorem (Satz von Urysohn). *Es sei* X *ein metrischer Raum. Es seien* $A, B \subset X$ *abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Abbildung* $\psi\colon X \to [0,1]$, *so dass* $\psi(a) = 0$ *für alle* $a \in A$ *und* $\psi(b) = 1$ *für alle* $b \in B$.

Beweis.

$$\psi(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$ □

8.2 Satz. *Für* $A, B \subset X \subset \mathbb{R}^n$ *disjunkt und abgeschlossen existiert kann* ψ *sogar von der Klasse* C^∞ *gewählt werden.*

Beweis. Buch über Differentialtopologie benutzen. □

8.3 Satz. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *pseudokonvex. Sei* $U := \{z \in \Omega | z_n = 0\}$. *Sei* $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ *gegeben durch* $\pi(z) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ *und sei* $\widetilde{U} = \pi(U)$. *Für jedes* $f \in \mathcal{A}(\widetilde{U})$ *existiert* $F \in \mathcal{A}(\Omega)$, *so dass* $F(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) = f(z_1, \ldots, z_{n-1})$ *für* $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \widetilde{U}$.

Beweis. Setze $B := \left\{ z \in \Omega \middle| \pi(z) \notin \widetilde{U} \right\}$. Dann sind B und U disjunkt und abgeschlossen in der Teilraumtopologie von Ω. Wir wenden Urysohn zweimal an: Einmal mit B und U und dann mit $A = \widetilde{\psi}^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ und B, wobei $\widetilde{\psi}$ die Urysohn-Funktion vom ersten Mal ist. Beim zweiten Mal benötigen wir eine C^∞-Funktion. Dann ist A eine Umgebung von U in der Teilraumtopologie. Für ein noch zu bestimmendes ν setzen wir

$$F(z) := \psi(z) f(\pi(z)) + z_n \nu(z).$$

Wenn es uns gelingt, ν so zu wählen, dass $\bar\partial F = 0$, dann sind wir fertig. Um das zu schaffen, benötigen wir

$$\bar\partial \nu(z) = \frac{(-\bar\partial \psi(z)) f(\pi(z))}{z_n}.$$

Die rechte Seite ist in $C^\infty(\Omega)$, weil der Zähler in einer Umgebung von U verschwindet. Anwendung des $\bar\partial$-Operators auf die rechte Seite gibt Null, also gibt es eine Lösung ν der Gleichung. □

8.4 Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Ein Randpunkt $P \in \partial\Omega$ heißt *wesentlich,* wenn es $h \in \mathcal{A}(U)$ gibt, so dass für jede Umgebung U_2 von P, jede nicht-leere offene Menge $U_1 \subset U_2 \cap U$ und jedes $h_2 \in \mathcal{A}(U_2)$ ein $z \in U_1$ gibt, so dass $h_2(z) \neq h(z)$.

8.5 Bemerkung. Ω ist genau dann ein Holomorphiegebiet, wenn die Menge der wesentlichen Punkte dicht in $\partial\Omega$ ist.

8.6 Lemma. *Die Menge der wesentlichen Punkte von Ω ist abgeschlossen in $\partial\Omega$.*

Beweis. Wenn P nicht wesentlich ist, dann sind auch alle Punkte in einer hinreichend kleinen Umgebung nicht wesentlich. □

8.7 Bezeichnung. Ein Randpunkt P von Ω heißt *erreichbar,* wenn es ein $w \in \mathbb{C}^n$, so dass für die Ebene

$$H := \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} (z_j - P_j)\overline{w}_j = 0 \right\}$$

gilt

(a) $H \cap \Omega \neq \emptyset$,

(b) P ist Randpunkt von $H \cap \Omega$ in der Teilraumtopologie von H.

8.8 Lemma. *Für jede offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ist die Menge der erreichbaren Punkte dicht in $\partial\Omega$.*

Beweis. Seien $\widetilde{P} \in \partial\Omega$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $q \in \Omega$ mit $|\widetilde{P} - q| < \frac{\epsilon}{2}$. Es sei $r > 0$ das Supremum aller Werte mit $B_r(q) \subset \Omega$. Mit einem Kompaktheitsschluss sieht man, dass $\overline{B}_r(q) \not\subset \Omega$. Es gibt also $P \in \partial B_r(q) \cap \partial\Omega$. Wegen $r < \frac{\epsilon}{2}$ gilt $|\widetilde{P} - P| < \epsilon$. Für w nimmt man nun irgendeinen Vektor, der senkrecht auf $P - q$ steht. □

8.9 Theorem. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvex. Dann ist Ω ein Holomorphiegebiet.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach n. Für $n = 0$ ist sie richtig, weil jede offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ Holomorphiegebiet ist.

Ω ist genau dann ein Holomorphiegebiet, wenn

$$\forall \Omega_2 \not\subset \Omega \text{ zshgd.} \forall \emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega \cap \Omega_2 \exists h \in \mathcal{A}(\Omega) \forall h_2 \in \mathcal{A}(\Omega_2) : h|_{\Omega_1} \neq h_2|_{\Omega_1}.$$

Die Behauptung sei für $n - 1$ richtig. Wir nehmen zum Widerspruch an, dass es ein pseudokonvexes $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ gibt, welches kein Holomorphiegebiet ist. Dann gilt

$$\exists \Omega_1, \Omega_2 \forall H \in \mathcal{A}(\Omega) \exists H_2 \in \mathcal{A}(\Omega_2) : H|_{\Omega_1} \neq H_2|_{\Omega_1}. \tag{8.1}$$

Da Ω_2 zusammenhängend ist, gibt es einen Weg in Ω_2 von Ω_1 zum Äußeren von Ω. Es sei $\widetilde{P}$ der erste Randpunkt von Ω auf diesem Weg. Da Ω_2 offen ist, gibt einen erreichbaren Randpunkt P, der ebenfalls mit Ω_1 verbunden werden kann. Wir bezeichnen die Zusammenhangskomponente von $\Omega \cap \Omega_2$, die Ω_1 umfasst, mit Z.

Wir wählen zu P eine komplexe Ebene E wie in der Definition. Wir zeigen, dass P wesentlich ist. Nach einem geeigneten Koordinatenwechsel dürfen wir annehmen, dass das w aus der Definition gleich e_n ist und $P = 0$ gilt. Wir identifizieren $\mathbb{C}^{n-1}$ mit E. Sei $U \coloneqq E \cap \Omega$. In der Übung haben wir gezeigt, dass U pseudokonvex ist. Wegen der Induktionsannahme ist U daher ein Holomorphiegebiet. Der Randpunkt 0 ist also wesentlich und es existiert eine holomorphe Abbildung $h \in \mathcal{A}(U)$, so dass für jede Nullumgebung U_2 in $\mathbb{C}^{n-1}$ und jede nicht-leere offene Menge $U_1 \subset U_2 \cap U$ und jede holomorphe Abbildung $h_2 \in \mathcal{A}(U_2)$ gilt $h_2|_{U_1} \neq h|_{U_1}$. Es sei $H \in \mathcal{A}(\Omega)$ eine Fortsetzung von h. Wir definieren U_2 als diejenige Zusammenhangskomponente von $\Omega_2 \cap E$, auf deren Rand P liegt, und setzen $U_1 = Z \cap U_2$. Zu H existiert $H_2 \in \mathcal{A}(\Omega_2)$ wie in (8.1). Dann gilt $H = H_2$ in Ω_1, also auch in Z. Setzt man $h_2 = H_2|_{U_2}$ so haben wir eine Funktion gefunden, die in U_1 mit h übereinstimmt. $\square$

9 Die Cousinschen Probleme

9.1 Satz (Satz von Hefer). *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ *offen und pseudokonvex mit* $0 \in \Omega$ *und es sei* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ *mit* $f(0) = 0$*. Dann existieren* $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\Omega)$*, so dass* $f(z) = z_1 f_1(z) + z_2 f_2(z)$ *für alle* z*.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jeder Punkte $P \in \Omega$ eine Umgebung U_P besitzt, in welcher f eine Zerlegung wie in der Behauptung hat. Für Punkte $P \neq 0$ ist das klar, weil man f entweder durch z_1 oder z_2 teilen kann. Im Ursprung zerlegt man die Taylorreihe geeignet. Wir wählen abzählbar viele P_j, so dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_{P_j} = \Omega$ und jedes Kompaktum nur endlich viele U_{P_j} trifft. Es gibt eine untergeordnete Zerlegung der Eins, also $\varphi_j \in \mathcal{D}(U_{P_j})$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j = 1$. Für jedes j wählen wir $f_1^j, f_2^j \in \mathcal{A}(U_{P_j})$, so dass $f(z) = z_1 f_1^j(z) + z_2 f_2^j(z)$ für alle $z \in U_{P_j}$. Für j, k mit $U_{P_j} \cap U_{P_k} \neq \emptyset$ setzen wir $g_{j,k}^1 := f_1^k - f_1^j$ und $h_1^i := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k g_{k,i}^1$. In $U_{P_i} \cap U_{P_j}$ gilt

$$h_j^1 - h_i^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k (g_{k,j}^1 - g_{k,i}^1) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k g^1 i, j = g_{i,j}^1 = f_1^j - f_1^i. \tag{9.1}$$

Also $\bar{\partial} h_1^j - \bar{\partial} h_i^1 = 0$ in $U_{P_i} \cap U_{P_j}$. Daher ist die folgende Funktion wohldefiniert

$$\alpha_1(z) := \bar{\partial} h_1^i(z) \quad \text{für } z \in U_{P_i}.$$

Da $\bar{\partial}\alpha_1 = 0$ und Ω pseudokonvex ist, existiert eine C^∞-Funktion h_1 auf Ω mit $\bar{\partial} h_1 = \alpha_1$.

Wir definieren nun g_{ki}^2 und h_2^i analog zu oben. Dann gilt für $u \in U_{P_i}$, dass $z_1 h_1^i(z) + z_2 h_2^i(z) = 0$. Also gilt

$$h_2^i = -\frac{z_1 h_1^i}{z_2}$$

Die linke Seite ist von der Klasse C^∞, also gilt das auch für die rechte. Wir setzen für

$$\alpha_2(z) := -\frac{z_1 \bar{\partial} h_1^i(z)}{z_2} \quad \text{für } z \in U_{P_i}.$$

Genau wie α_1 ist auch α_2 wohldefiniert und $\bar{\partial}$-geschlossen. Für

$$h_2(z) := -\frac{z_1 h_1(z)}{z_2}, \quad z \in \Omega,$$

gilt $\bar{\partial} h_2 = \alpha_2$. Daher ist h_2 von der Klasse C^∞. Für $\ell = 1, 2$ setzen wir $g_\ell^i = h_\ell^i - h_\ell$. Dann ist g_ℓ^i holomorph auf U_{P_i}. Wegen (9.1) folgt

$$f_1^i - g_1^i = f_1^i - (h_1^i - h_1)) = f_1^j - (h_1^j - h_1)) = f_1^j - g_1^j.$$

Daher wird durch $f_1(z) = f_1^i(z) - g_1^i(z)$, $z \in U_{P_i}$, eine holomorphe Funktion in Ω erklärt. Genauso bekommen wir f_2. Es gilt schließlich

$$\begin{aligned} z_1 f_1(z) + z_2 f_2(z) &= z_1 \left(f_1^i(z) - g_1^i(z))\right) + z_2 \left(f_2^i(z) - g_2^i(z))\right) \\ &= z_1 \left(h_1(z) + f_1^i(z) - h_1^i(z)\right) + z_2 \left(h_2(z) + f_2^i(z) - h_i^2(z)\right) \\ &= (-z_1 h_i^1(z) - z_2 h_2^i(z)) + (z_1 f_i^1(z) + z_2 f_i^2(z)) + (z_1 h_1(z) + z_2 h_2(z)) \\ &= f(z). \end{aligned}$$ □

9.2 Definition. Das *erste Cousinsche Problem* ist die folgende Aufgabe: Gegeben seien ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von Ω, und für jedes Paar $(j,k) \in I^2$ mit $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ ein $g_{j,k} \in \mathcal{A}(U_j \cap U_k)$ mit folgenden Eigenschaften

(a) $g_{j,k} = -g_{k,j}$, falls $U_j \cap U_k \neq \emptyset$,

(b) $g_{j,k} + g_{k,\ell} + g_{\ell,j} = 0$ falls $U_j \cap U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$.

Unter diesen Voraussetzungen sind Funktionen $g_j \in \mathcal{A}(U_j)$ gesucht, so dass $g_{j,k} = g_j - g_k$ für alle (j,k) mit $U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

9.3 Definition. Das *zweite Cousinsche Problem* ist die folgende Aufgabe: Gegeben seien ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von Ω, und für jedes Paar $(j,k) \in I^2$ mit $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ ein $g_{j,k} \in \mathcal{A}(U_j \cap U_k)$ mit folgenden Eigenschaften

(a) $g_{j,k} \cdot g_{k,j} = 1$, falls $U_j \cap U_k \neq \emptyset$,

(b) $g_{j,k} \cdot g_{k,\ell} \cdot g_{\ell,j} = 1$ falls $U_j \cap U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$.

Unter diesen Voraussetzungen sind nirgends verschwindende Funktionen $g_j \in \mathcal{A}(U_j)$ gesucht, so dass $g_{j,k} = g_j/g_k$ für alle (j,k) mit $U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

9.4 Satz. *Das Analogon zum ersten Cousinschen Problem in der Klasse C^∞ ist stets lösbar.*

Beweis. Wir benötigen eine der Überdeckung untergeordnete Zerlegung $(\varphi_j)_{j\in I}$ der Eins. Dann setzen wir

$$g_j = \sum_i \varphi_i g_{i,j}, \quad \text{in } U_j.$$

Dann

$$g_j - g_k = \sum_i \varphi_i (g_{i,j} - g_{i,k}) = \sum_i \varphi_i g_{j,k} = g_{j,k}.$$ □

9.5 Theorem. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet. Dann ist das erste Cousinsche Problem in Ω stets lösbar.*

Beweis. Wir setzen wieder

$$h_j = \sum_i \varphi_i g_{i,j}.$$

In $U_j \cap U_k$ gilt

$$\overline{\partial}(h_j - h_k) = \overline{\partial} \sum_i \varphi_i g_{j,k} = \overline{\partial} g_{j,k} = 0.$$

Daher existiert $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ mit $\overline{\partial} u = \overline{\partial} h_j$ in U_j. Wir setzen $g_j := h_j - u$. □

9.6 Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $f \in C^1(\Omega)$ nullstellenfrei. Dann gibt es eine C^1-Abbildung $g \colon \Omega \to \mathbb{C}$, so dass $f = \exp \circ g$. Wenn f von der Klasse C^k oder holomorph ist, dann auch g.*

Beweis. Wir fixieren $w \in \Omega$. Für gegebenes $z \in \Omega$ wählen wir einen stückweisen C^1-Weg $\gamma \colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = w$ und $\gamma(1) = z$ und setzen $g(z) := h(1)$ für

$$h(t) = \log f(w) + \int_0^t \frac{f'(\gamma(\tau))}{f(\gamma(\tau))} \gamma'(\tau) \, d\tau.$$

Wie in der Funktionentheorie zeigt man nun, dass

$$\frac{d}{dt} \left(f(\gamma(t)) \exp(-h(t)) \right) = 0.$$

Daraus folgt $\exp(g(z)) = f(z)$, aber die Wohldefiniertheit von g muss noch gezeigt werden. Wenn g nicht wohldefiniert wäre, dann gäbe es eine Weg γ mit $\gamma(0) = w = \gamma(1)$, so dass für das wie oben definierte h gilt $h(1) - h(0) \neq 0$. Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $H \colon [0,1]^2 \to \Omega$, so dass

(a) $H(0,t) = \gamma(t)$ für alle t,

(b) $H(1,t) = w$ für alle t,

(c) $H(s,0) = H(s,1) = w$ für alle s.

Dann ist die Funktion

$$\eta \colon s \mapsto \int_{H(s,\cdot)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta$$

stetig. Wir hatten bereits gesehen, dass $e^{\eta(s)} = f(w)$ für alle s. Also $\eta(s) = 2\pi i m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Wegen der Stetigkeit von η ist dieses m für alle s dasselbe. □

9.7 Theorem. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet. Dann ist das zweite Cousinsche Problem genau dann lösbar, wenn es in der Klasse der stetigen Funktionen lösbar ist.*

Beweis. 1. Fall: Alle U_i sind Polyzylinder, insbesondere einfach zusammenhängend. Weil das Cousinsche Problem in der Klasse der stetigen Funktionen lösbar ist, gibt es stetige, nullstellenfreie Funktionen $g_i' \in C(U_i)$, so dass $g_{i,j} = g_j'/g_i'$. Wegen des Lemmas existieren $h_i' \in C(U_i)$, so dass $g_I' = \exp \circ h_i'$. Setzt man $h_{i,j} = h_j' - h_i'$, so gilt $g_{i,j} = \exp \circ h_{i,j}$ und $h_{i,j}$ ist holomorph.

Die $h_{i,j}$ sind holomorphe Daten für ein erstes Cousinsches Problem, denn, da sie als Differenzen der stetigen Funktionen h_i' entstanden sind, sind die Konsistenzbedingungen erfüllt. Es gibt also $h_i \in \mathcal{A}(U_i)$, so dass $h_{i,j} = h_j - h_i$. Dann lösen die $g_i := \exp \circ h_i$ das gegebene Cousinsche Problem zweiter Art.

Der allgemeine Fall wird durch Verfeinerung auf den ersten zurückgeführt. Das rechne ich nicht vor, obwohl beim Übergang von der verfeinerten Überdeckung zur ursprünglichen auch noch mal ein Cousinsches Problem gelöst werden muss. $\square$

9.8 Beispiel. In §6.1 des Buchs von Krantz wird ein auf Oka zurückgehendes Beispiel eines Holomorphiegebiets gerechnet, in dem das zweite Cousinsche Problem nicht immer lösbar ist.

10 Garben

10.1 Definition. Sei Ω ein topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}$. Eine *Prägarbe* $\mathscr{F}$ auf Ω besteht aus ein Familie $(\mathscr{F}(U))_{U\in\mathcal{T}}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen und zu jedem Paar $(V,U) \in \mathcal{T}^2$ mit $V \subset U$ einer Abbildung $\rho_{V,U}\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, genannt *Einschränkungsabbildung,* so dass

(a) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}$ für alle U,

(b) $\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$, falls $W \subset V \subset U$.

Meist schreibt man $f|_v$ anstelle von $\rho_{V,U}(f)$.

Eine Prägarbe $\mathscr{F}$ ist eine *Garbe,* wenn zusätzlich die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Falls $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge U ist und falls für $f, g \in \mathscr{F}(U)$ für alle $i \in I$ gilt $f|_{U_i} = g|_{U_i}$, so gilt $f = g$.

(b) Falls $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge U ist und falls für jedes $i \in I$ ein $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ gegeben ist, so dass $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ für alle $i,j \in I$, so gibt es $f \in \mathscr{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle i.

Die Elemente von $\mathscr{F}(U)$ nennt man *Schnitte* über U. Anstelle von $\mathscr{F}(U)$ schreibt man auch $\Gamma(U,\mathscr{F})$.

10.2 Beispiel. (a) $\mathcal{A}(\Omega)$ mit den üblichen Einschränkungsabbildungen ist eine Garbe.

(b) Genauso ist $C^k(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, eine Garbe.

10.3 Definition. Es sei $\mathscr{F}$ eine Garbe über Ω. Für $z \in \Omega$ sei $\mathcal{U}_z$ die Menge der offenen Umgebungen von z. Auf $\bigcup_{U\in\mathcal{U}_z} \mathscr{F}(U)$ führen wir wie folgt eine Äquivalenzrelation ein: $f \in \mathscr{F}(U)$ ist äquivalent zu $g \in \mathscr{F}(V)$, wenn es ein offenes $W \subset U \cap V$ gibt, so dass $f|_W = g|_W$. Die Äquivalenzklassen heißen *Keime* in z. Der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Keime ist der *Halm* in z. Man schreibt $\mathscr{F}_z$ für den Halm in z.

10.4 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $z \in \Omega$. Der Halm $\mathcal{A}(\Omega)_z$ besteht aus den konvergenten Potenzreihen in z.

10.5 Definition. Es sei $\mathscr{F}$ eine Garbe auf Ω und es sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Ω. Für $r \in \mathbb{N}_0$ sind die $\mathcal{U}$ untergeordneten r-*Coketten* definiert als Abbildungen f, die jedem $(i_0, \dots, i_r) \in \mathbb{N}^{r+1}$ ein Element von $\Gamma(U_{i_0}, \dots, U_{i_r}, \mathscr{F})$ zuordnen und für die gilt $f(i_0, \dots, i_j, \dots, i_k, \dots, i_r) = -f(i_0, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_r)$. Den Raum aller r-Coketten bezeichnen wir mit $C^r(\mathcal{U}, \mathscr{F})$.

Der *Co-Randoperator* $\delta\colon C^r(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to C^{r+1}(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ ist definiert durch

$$(\delta f)(i_0, \dots, i_{r+1}) := \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j f\big(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{r+1}\big) \,,$$

wobei der mit dem Dach versehene Index wegfällt.

10.6 Satz. $\delta^2 = 0$.

10.7 Definition. Der Kern von $\delta\colon C^r \to C^{r+1}$ besteht aus den *Cozyklen.* Der Raum der Cozyklen wird als $Z^r(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ geschrieben. Das Bild von $\delta\colon C^{r-1} \to C^r$ besteht aus den *Coründern.* Der Raum der Coründer wird als $B^r(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ geschrieben. Für $r = 0$ setzen wir $B^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = 0$.

Wegen des Satzes gilt $B^r \subset Z^r$. Daher existiert $H^r(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := Z^r(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, die r-*te Kohomologiegruppe* von Ω mit Werten in $\mathscr{F}$ (relativ zu $\mathcal{U}$).

10.8 Bemerkung. Eine 0-Cokette ist eine Folge $(f(i))_{i\in\mathbb{N}}$ mit $f(i) \in \Gamma(U_i, \mathscr{F})$. Für $i, j \in \mathbb{N}$ ist $(\delta f)(i, j) \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathscr{F})$ definert durch $f(j) - f(i)$. Wegen der Eigenschaft (b) aus der Definition einer Garbe gilt also $Z^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \Gamma(\Omega, \mathscr{F})$ und daher auch $H^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \Gamma(\Omega, \mathscr{F})$

10.9 Definition. Wir sagen, dass eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine *Leray-Überdeckung* ist, wenn für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ und jede Wahl $i_0, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$ gilt, dass $H^p(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}, \mathscr{F}) = 0$.

10.10 Theorem (Leray). *Für je zwei Leray-Überdeckungen sind alle Kohomologiegruppen mit Werten in $\mathscr{F}$ isomorph.*

Diese Kohomologiegruppe bezeichnet man dann mit $H^r(\Omega, \mathscr{F})$.

10.11 Bemerkung. Wenn Ω ein Holomorphiegebiet ist, dann folgt $H^1(\Omega, \mathcal{A}) = 0$ aus der Lösbarkeit des Cousin I Problems.

10.12 Definition. Für offenes $U \subset \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit $\Omega^{p,q}(U)$ den Raum der glatten (p, q)-Formen auf U. Der $\bar\partial$-Operator induziert den *Dolbeault-Komplex*

$$\Omega^{(0,0)}(U) \xrightarrow{\bar\partial_{0,0}} \Omega^{(0,1)}(U) \xrightarrow{\bar\partial_{0,1}} \Omega^{(0,2)}(U) \xrightarrow{\bar\partial_{0,2}} \dots \xrightarrow{\bar\partial_{0,n-1}} \Omega^{(0,n)}(U).$$

Dann bilden die

$$H^r_D(U) := \ker \bar\partial_{0,r} / \operatorname{Bild} \bar\partial_{0,r-1}$$

die *Dolbeault-Kohomologie.*

10.13 Theorem (Dolbeault). *Wenn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen ist und $\mathcal{U}$ eine abzählbare Überdeckung, bestehend aus Holomorphiegebieten, dann $H^r_D(\Omega) \cong H(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ für alle $r \in \mathbb{N}$.*

Ab jetzt bezeichne ich die Garbe der analytischen Funktionen mit $\mathscr{O}$.

10.14 Definition. Eine *analytische Garbe* ist eine Garbe von $\mathscr{O}$-Moduln.

10.15 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, sei $V \subset \Omega$. Für die *Idealgarbe* $\mathscr{I}$ besteht $\mathscr{I}(U)$ aus allen $f \in \mathscr{O}(U)$, die auf V verschwinden. Die Idealgarbe ist analytisch.

10.16 Bemerkung. Ein analytischer *Garbenmorphismus* $\psi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ besteht aus $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $\psi_U\colon \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{G})$ derart, dass für jedes $z \in \Omega$ eine $\mathscr{O}_z$-lineare Abbildung vom Halm $\mathscr{F}_z$ in den Halm $\mathscr{G}_z$ induziert wird. Man beachte, dass der Basispunkt bei beiden Halmen derselbe ist.

Eine *exakte Sequenz*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

von abelschen Gruppen besteht aus zwei Morphismen φ und ψ mit $\operatorname{Bild} \varphi = \ker \psi$. Eine Sequenz von analytischen Garben ist exakt, wenn sie für jeden Halm exakt ist. Wenn nun

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben und $\mathcal{U}$ eine abzählbare Überdeckung ist, dann kann man zeigen, dass sie die *lange Kohomologiesequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^0(\mathcal{U}, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \dots$$

induziert. Wie man φ^* und ψ^* macht, ist mehr oder weniger klar. Die Konstruktion von δ^* erfordert das Neunerlemma.

10.17 Definition. Eine analytische Garbe $\mathscr{F}$ auf Ω heißt *lokal endlich erzeugt,* wenn es zu jedem $z \in \Omega$ eine Umgebung U und endlich viele $f_1, \dots, f_k \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ gibt, so dass für jedes $\zeta \in U$ die Keime $[f_1]_\zeta, \dots, [f_k]_\zeta$ den Halm $\mathscr{F}_\zeta$ erzeugen.

10.18 Beispiel. (a) Sei $\Omega := \mathbb{C}^2$ und sei $\mathscr{I}$ die Idealgarbe zu $V := \mathbb{C} \times \{0\}$. Dann ist $\mathscr{I}$ lokal endlich erzeugt.

Beweis. Für jedes z wählt man $U := \Omega$ und $f_1(z) := z_2$. □

(b) Für $\Omega := \mathbb{C}$ ist L^1_{loc} eine analytische Garbe. Da der Halm die aufsteigende Kettenbedingung nicht erfüllt (dazu betrachte man eine Folge von Sektoren), ist diese Garbe nicht lokal endlich erzeugt.

10.19 Theorem (Oka (1950)). *Jede lokal endlich erzeugte analytische Untergarbe von $\mathscr{O}^k$ ist kohärent.*

Das Satz von Oka nehmen wir jetzt als Definition.

10.20 Theorem (Theorem A von Cartan (1953)). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvex und sei $\mathscr{F}$ eine kohärente analytische Garbe über Ω. Dann wird für jedes $z \in \Omega$ der Halm $\mathscr{F}_z$ von endlich vielen Keimen von Schnitten in $\Gamma(\Omega, \mathscr{F})$ erzeugt (als $\mathscr{O}_z$-Modul).*

10.21 Theorem (Theorem B von Cartan (1953)). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudokonvex und sei $\mathscr{F}$ eine kohärente analytische Garbe über Ω. Dann gilt $H^r(\Omega, \mathscr{F}) = 0$ für jedes $r \in \mathbb{N}$.*

10.22 Theorem. *Es sei $\mathscr{F}$ eine kohärente analytische Garbe über einem pseudokonvexen Gebiet Ω. Es gebe $f_1, \dots, f_k \in \Gamma(\Omega, \mathscr{F})$, so dass für jedes $z \in \Omega$ der Halm $\mathscr{F}_z$ von den Keimen $[f_j]_z$, $j = 1, \dots, k$, erzeugt wird. Für jedes $g \in \Gamma(\Omega, \mathscr{F})$ gibt es dann $g_1, \dots, g_k \in \Gamma(\Omega, \mathscr{F})$, so dass $g = \sum_{j=1}^k g_j f_j$.*

Beweis. Wenn $\psi(g_1, \dots, g_k) = \sum_{j=1}^k g_j f_j$ und $\mathscr{R}$ die zugehörige Garbe von Relationen, dann ist die folgende Sequenz von analytischen Garben exakt

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \xrightarrow{\iota} \mathscr{O}^k \xrightarrow{\psi} \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

Wegen Theorem B hat die zugehörige lange Kohomologiesequenz die Gestalt

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathscr{R}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\mathcal{U}, \mathscr{O}^k) \xrightarrow{\psi^*} H^0(\mathcal{U}, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^*} 0.$$

Speziell ist ψ^* surjektiv. □

10.23 Korollar. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein pseudokonvexes Gebiet und seien $f_1, \dots, f_k \in \Gamma(\Omega, \mathscr{O})$ ohne gemeinsame Nullstellen. Dann gibt es $g_1, \dots, g_k \in \Gamma(\Omega, \mathscr{O})$, so dass $1 = \sum_{j=1}^k g_j f_j$.*

Bemerkung. Dieselbe Frage, aber unter der zusätzlichen Forderung, dass die f_j und die g_j beschränkt und $\sum_{j=1}^k |f_j|$ von der Null weg beschränkt sein sollen, ist das *Korona-Problem.* Für $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ wurde die Frage 1962 von Carleson positiv beantwortet.

Für mehrdimensionale Polyzylinder und Kugeln ist das Korona-Problem dagegen offen. Sibony hat aber im Jahr 1987 ein pseudokonvexes Gebiet konstruieren, für welches die Aussage des Korona-Problems falsch ist.