

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Homotopietyptheorie – Blatt 2

Vorrechnen in der Übung am 25.10.2019

Wir haben in der Vorlesung bereits folgende Regeln kennengelernt:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma \text{ ctx}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-INTRO} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-CUMUL} \\ \frac{}{\cdot \text{ ctx}} \text{CTX-EMP} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma, x:A \text{ ctx}} \text{CTX-EXT} \\ \frac{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \text{ ctx}}{x_1:A_1, \dots, x_n:A_n \vdash x_i:A_i} \text{VBLE} \end{array} \right.$$

Auf diesem Blatt arbeiten wir mit dem Schlussystem, das nur aus diesen fünf Regeln besteht.

In der Vorlesung wurde behauptet, dass die folgende Regel unnötig ist:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, \Delta \vdash b : B}{\Gamma, x:A, \Delta \vdash b : B} \text{WKG}$$

Hier ist noch eine weitere unnötige Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, \Delta \text{ ctx}}{\Gamma, x:A, \Delta \text{ ctx}} \text{WKG2}$$

Aufgabe 1:

(a) Leiten Sie das folgende Urteil aus (*) her:

$$x : \mathcal{U}_6, y : \mathcal{U}_3, z : x \vdash y : \mathcal{U}_5$$

(b) Zeigen Sie, dass WKG *nicht* unnötig ist im folgenden Sinn: Es gibt potentielle Urteile u_1 und u_2 , so dass sich u_2 mit (*) und WKG aus u_1 herleiten lässt, aber mit (*) alleine lässt sich u_2 nicht aus u_1 herleiten. (Geben Sie u_1 und u_2 explizit an.)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass WKG und WKG2 in der Tat unnötig sind im Sinne von: Wenn die Annahmen (herleitbare) Urteile sind, dann auch die Folgerung.

Hinweis: Geben Sie an, wie man aus der Herleitung der rechten Annahme ($\Gamma, \Delta \vdash b : B$ bzw. $\Gamma, \Delta \vdash \text{ctx}$) eine Herleitung der Folgerung ($\Gamma, x:A, \Delta \vdash b : B$ bzw. $\Gamma, x:A, \Delta \vdash \text{ctx}$) konstruieren kann. Machen Sie dazu am besten eine Induktion über die Länge der Herleitung der rechten Annahme und eine Fallunterscheidung danach, welche der Regeln aus (*) im letzten Schritt dieser Herleitung verwendet wird.

Alternativ-Hinweis: Sie können statt dessen auch die Menge sämtlicher (mit (*)) herleitbaren Urteile explizit beschreiben.