

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 14

Abgabe der Lösungen (freiwillig) am 04.02.2026, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Durch Einreichen von schriftlichen Lösungen zu von Ihnen gewählten Aufgaben können ggf. noch bis zu 8 zusätzlich benötigte Bonuspunkte erworben werden.
Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Aufgabe 14.1 (+4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p = \text{char}(K) > 0$, und sei $c(X, Y) = p^{-1}((X + Y)^p - X^p - Y^p) \in \mathbb{Z}[X, Y]$.

(a) Zeigen Sie: Die affine Varietät $\mathbb{A}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in K\}$ wird mittels der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + c(x_1, x_2))$$

zu einer linearen algebraischen Gruppe G .

(b) Zeigen Sie weiter: Die Gruppe G ist zusammenhängend, unipotent, kommutativ und hat die Dimension 2, aber G ist nicht isomorph zu der „Vektorgruppe“ $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$.

Aufgabe 14.2 (+4 Punkte)

Zeigen Sie: $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$ bildet eine 2-dimensionale zusammenhängende Zariski-abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ und zudem einen über $\mathbb{R}$ definierten, aber nicht über $\mathbb{R}$ zerfallenden Torus. Letzteres bedeutet definitionsgemäß: Über $\mathbb{C}$ ist G isomorph zu $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$, aber über $\mathbb{R}$ nicht.

Aufgabe 14.3 (+4 Punkte)

Sei K ein Körper und A eine kommutative, assoziative K -Algebra mit 1.

(a) Zeigen Sie: Der A -Modul $\mathcal{D} = \text{Der}_K(A, A)$ aller K -Derivationen von A in sich trägt eine natürliche Liealgebrenstruktur über K mit $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ für $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$.

(b) Beweisen Sie die *Leibnizsche Formel* für die wiederholte Verknüpfung einer Derivation $D \in \mathcal{D}$ mit sich:

$$D^n(ab) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^k a)(D^{n-k} b) \quad \text{für } a, b \in A.$$

(c) Sei nun $\text{char}(K) = 0$ und $D \in \mathcal{D}$ nilpotent, d. h., es gelte $D^N = 0$ für hinreichend große $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß

$$T = \exp(D) = \sum_{k=0}^{\infty} D^k / k!$$

einen Automorphismus der assoziativen K -Algebra A liefert.

Bitte wenden!

Aufgabe 14.4

(+4 Punkte)

Bestimmen Sie ein primitives Element für den Körper $E = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/5})$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 14.5

(+4 Punkte)

Sei V eine affine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K , mit irreduziblen Komponenten $V_1, \dots, V_r$. Sei $v \in V$ dergestalt, daß $v \in V_1$, aber $v \notin V_j$ für $2 \leq j \leq r$ gelten. Zeigen Sie: Dann induziert die Inklusionsabbildung $\iota: V_1 \rightarrow V$ einen Isomorphismus $d\iota_v: T_v V_1 \rightarrow T_v V$.

Aufgabe 14.6

(+4 Punkte)

Berechnen Sie möglichst konkret für G gleich $\mathbb{G}_a$ bzw. $\mathbb{G}_m$, über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K , die Liealgebra

$$\mathrm{Der}_K(K[G], K[G]),$$

indem Sie eine K -Basis und die Lieklammer auf Basiselementen angeben. Bestimmen Sie anschließend die Unterliealgebra $L(G)$ der linksinvarianten K -Derivationen von $K[G]$.

*Dies ist das letzte Übungsblatt zu dieser Veranstaltung.
Vielen Dank für Ihre Teilnahme und weiter viel Erfolg!*