

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 13

Abgabe der Lösungen am 28.01.2026, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 13.2 und 13.3 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Aufgabe 13.1

(a) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle K -Derivationen von der K -Algebra $A = K[X_1, \dots, X_n]$ in sich, als A -Modul betrachtet.

Hinweis: Erläutern Sie zunächst, wieso jede solche Derivation D eindeutig bestimmt ist durch die speziellen Werte $D(X_1), \dots, D(X_n)$.

(b) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, sei A eine kommutative K -Algebra und $D \in \text{Der}_K(A, A)$. Zeigen Sie: $D^p = \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{p \text{ Faktoren}} \in \text{Der}_K(A, A)$.

Aufgabe 13.2

(4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f = X_1X_2 + X_1^3 + X_2^3 \in K[X_1, X_2]$. Wir betrachten die affine Varietät $V = \mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^2$.

(a) Zeigen Sie: V ist eine irreduzible Varietät.

(b) Bestimmen Sie für alle $v \in V$ die Dimension des zugehörigen Tangentialraums $T_v V$.

Aufgabe 13.3

(4 Punkte)

Sei $\psi: V \rightarrow W$ ein Morphismus zwischen affinen Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K , und sei $\psi^*: K[W] \rightarrow K[V]$ der entsprechende K -Algebrenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Die Vorschrift $d \mapsto d \circ \psi^*$ vermittelt eine K -lineare Abbildung

$$d\psi_v: T_v V \rightarrow T_{\psi(v)} W.$$

(b) Sei $\varphi: U \rightarrow V$ ein weiterer Morphismus zwischen affinen Varietäten über K , und $u \in U$. Beweisen Sie die folgende Kettenregel:

$$d(\psi \circ \varphi)_u = d\psi_{\varphi(u)} \circ d\varphi_u.$$

(c) Folgern Sie: Ist $\psi: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus, so ist $d\psi_v: T_v V \rightarrow T_{\psi(v)} W$ ein K -linearer Isomorphismus zwischen den beiden Tangentialräumen.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.4

Sei V eine affine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K . Sei $v \in V$, und setze

$$M_v = \{f \in K[V] \mid f(v) = 0\} \trianglelefteq K[V].$$

(a) Zeigen Sie: Jedes $d \in \operatorname{Der}_K(K[V], K_v) = T_v V$ induziert eine K -lineare Abbildung

$$\ell_d: M_v/M_v^2 \rightarrow K, \quad g + M_v^2 \mapsto d(g).$$

(b) Zeigen Sie weiter: Die Abbildung $T_v V \rightarrow \operatorname{Hom}_K(M_v/M_v^2, K)$, $d \mapsto \ell_d$ liefert einen Isomorphismus von K -Vektorräumen mit Umkehrabbildung

$$\operatorname{Hom}_K(M_v/M_v^2, K) \rightarrow T_v V, \quad L \mapsto d_L,$$

wobei $d_L(f) = L(f - f(v) + M_v^2)$ für $f \in K[V]$ gelte.