

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 12

Abgabe der Lösungen am 21.01.2026, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 12.1 und 12.2 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $B_n \leq GL_n$ die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K . Zeigen Sie: Jedes halbeinfache Element $g \in B_n$ ist bereits in B_n konjugiert zu einer Diagonalmatrix.

Hinweis: Verwenden Sie wie in der Vorlesung skizziert Induktion nach n , indem Sie für $n \geq 2$ eine naheliegende Projektion der Form $B_n \rightarrow B_{n-1}$ nutzen.

Begriffsbildung und Notation. Im Folgenden sei K ein beliebiger Körper. Eine *Liealgebra* L über K ist ein K -Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$L \times L \rightarrow L, \quad (x, y) \mapsto [x, y],$$

so daß für $x, y, z \in L$ gelten:

$$[x, x] = 0 \quad \text{und} \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Letztere Relation heißt *Jacobi-Identität*.

Eine Liealgebra heißt *abelsch* (oder *kommutativ*), falls $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in L$ gilt. Eine *Lieunteralgebra* von L ist ein K -Untervektorraum M mit $[x, y] \in M$ für alle $x, y \in M$. Ein *Homomorphismus* $\varphi: L \rightarrow \tilde{L}$ zwischen Liealgebren ist eine K -lineare Abbildung mit

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad \text{für alle } x, y \in L.$$

Der *Kern*

$$\text{Kern}(\varphi) = \{x \in L \mid \varphi(x) = 0\}$$

eines solchen Homomorphismus bildet ein *Ideal* I von L , d. h. eine Lieunteralgebra I mit der Eigenschaft $[x, y] \in I$ für alle $x \in I$ und $y \in L$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: In einer Liealgebra L gilt $[x, y] = -[y, x]$ für alle $x, y \in L$.

(b) Sei A eine assoziative K -Algebra. Zeigen Sie: A wird mittels $[a, b] = ab - ba$ eine Liealgebra.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathfrak{gl}_n(K)$ die Liealgebra $\text{Mat}_n(K)$ bzgl. der in (b) eingeführten Lieklammer. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{sl}_n(K) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid \text{Spur}(x) = 0\}$$

und

$$\mathfrak{o}_n(K) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(K) \mid x + {}^{\text{tr}}x = 0\}$$

sind Lieunteralgebren von $\mathfrak{gl}_n(K)$.

(d) Sei $\text{char}(K) = p > 0$. Sei L ein p -dimensionaler K -Vektorraum mit Basis $e_0, \dots, e_{p-1}$, wobei wir im folgenden alle Indizes modulo p lesen. Zeigen Sie: Durch die Vorgabe $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$ für $0 \leq i, j \leq p - 1$ läßt sich eine Liealgebrastruktur auf L erklären.

Aufgabe 12.3

Definieren Sie Quotienten L/I von Liealgebren nach Idealen. Formulieren und beweisen Sie die Noetherschen Isomorphiesätze für Liealgebren. (Sie kennen diese grundlegenden Isomorphiesätze für Gruppen, assoziative Ringe etc.)

Zum Beispiel, sollen Sie zeigen: Ist $\varphi: L \rightarrow \tilde{L}$ ein Homomorphismus zwischen K -Liealgebren, so ist $\text{Bild}(\varphi)$ eine Lieunteralgebra von $\tilde{L}$ und es gilt $\text{Bild}(\varphi) \cong L/\text{Kern}(\varphi)$.

Aufgabe 12.4

(a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Liealgebren der Dimensionen 1 und 2.

(b) Eine Liealgebra L heißt *auflösbar*, falls es eine endliche Kette von Lieunteralgebren $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \dots \supseteq L_r = \{0\}$ gibt, so daß L_i ein Ideal von L_{i-1} und L_{i-1}/L_i eine abelsche Liealgebra für $i \in \{1, \dots, r\}$ ist. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle auflösbaren Liealgebren der Dimension 3.

(c) Welche nicht-auflösbaren Liealgebren der Dimension 3 fallen Ihnen ein?

Zusatz. Sie können versuchen, ganz allgemein Liealgebren der Dimension 3 zu klassifizieren. Das ist elementar möglich, aber ungleich komplizierter; es ist auf jeden Fall hilfreich, zusätzlich anzunehmen, daß der Grundkörper K algebraisch abgeschlossen ist.