

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 11

Abgabe der Lösungen am 14.01.2026, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 11.3 und 11.4 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Alle Varietäten und algebraischen Gruppen seien über K definiert.

Aufgabe 11.1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestätigen Sie die bereits in der Vorlesung mitgeteilten Dimensionen der linearen algebraischen Gruppen GL_n , SL_n , O_n , Sp_{2n} , D_n (invertierbare Diagonalmatrizen), B_n (invertierbare obere Dreiecksmatrizen) sowie U_n (invertierbare obere Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen 1).

Aufgabe 11.2

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, und sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei $W \subseteq \mathrm{SO}_n$ die Teilmenge aller Elemente x , deren Eigenwerte allesamt ungleich -1 sind. Beweisen Sie, daß sich jedes Element $g \in \mathrm{SO}_n$ als ein Produkt $g = x_1 x_2 x_3$ von geeigneten Elementen $x_1, x_2, x_3 \in W$ schreiben läßt.

Hinweis. Sei $g \in \mathrm{SO}_n$. Verwenden Sie die multiplikative Jordanzerlegung $g = g_s g_u$. Überlegen Sie sich, daß die Eigenwerte von g (und daher von g_s) von der Form

$$1, \dots, 1, -1, \dots, -1, a_1, \dots, a_1, a_1^{-1}, \dots, a_1^{-1}, \dots, a_r, \dots, a_r, a_r^{-1}, \dots, a_r^{-1}$$

sind, wobei die Vielfachheiten von a_i und a_i^{-1} jeweils gleich groß sind und die Vielfachheit von -1 daher gerade ist. Führen Sie einen Basiswechsel durch, so daß g_s Diagonalgestalt erhält, und bestimmen Sie die neue Strukturmatrix für die zugrundeliegende symmetrische Bilinearform. Betrachten Sie den Eigenraum von g_s zum Eigenwert -1 . Beachten Sie, daß es über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K bis auf Isomorphie nur eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform gibt. Weiter gibt es in SO_2 ein Element, dessen Quadrat $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist. Bestimmen Sie so ein $x \in W$ mit $x^2 g \in W$.

Bemerkung. Erinnern Sie sich an Aufgabe 9.2. Dort darf für W die oben explizit benannte Menge verwendet werden. Die Produktzerlegung, die jetzt hergeleitet wurde, kann wie in Aufgabe 9.2 beschrieben dazu verwendet werden, um zu folgern, daß SO_n die 1-Komponente der linearen algebraischen Gruppe O_n ist.

Aufgabe 11.3

(4 Punkte)

Sei $\varphi: G \rightarrow H$ eine Homomorphismus zwischen diagonalisierbaren linearen algebraischen Gruppen.

- (a) Erläutern Sie, wieso φ einen Homomorphismus $\varphi^*: X(H) \rightarrow X(G)$ zwischen den zugehörigen Charaktergruppen vermittelt.
- (b) Zeigen Sie: Ist φ injektiv bzw. surjektiv, so ist φ^* surjektiv bzw. injektiv.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.4

(4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und G ein n -dimensionaler Torus, d.h., $G \cong D_n \leq \mathrm{GL}_n$. Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ der algebraischen Gruppe G .

Aufgabe 11.5

Sei $n \in \mathbb{N}$ und G ein n -dimensionaler Torus, d.h., $G \cong D_n \leq \mathrm{GL}_n$. Zeigen Sie: Hat der Grundkörper K die Charakteristik 0, so existiert ein Element $g \in G$, so daß die zyklische Gruppe $\langle g \rangle$ Zariski-dicht in G ist.

Hinweis: Betrachten Sie ein Element $g \in D_n$, dessen Diagonaleinträge $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen sind, und setzen Sie $T = \overline{\langle g \rangle}^\circ$. Überlegen Sie sich, daß der durch die Einbettung $T \leq G$ induzierte Homomorphismus $X(G) \rightarrow X(T)$ injektiv ist.

Zusatz: Ist die Schlußfolgerung haltbar, wenn der Grundkörper positive Charakteristik besitzt?