

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 10

Abgabe der Lösungen am 07.01.2026, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 10.1 und 10.2 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Aufgabe 10.1

(4 Punkte)

Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die additive und ggf. multiplikative Jordanzerlegung für den Endomorphismus $\sigma \in \text{End}_K(V)$ mit Koordinatenmatrix

$$[\sigma]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(K)$$

bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ von $V = K^3$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis. Beachten Sie, daß Sie hinsichtlich der Charakteristik von K ggf. eine Fallunterscheidung zu treffen haben.

Aufgabe 10.2

(4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei G eine Zariski-abgeschlossene Untergruppe einer linearen algebraischen Gruppe H über K , und sei

$$I = \mathfrak{I}_{K[H]}(G) = \{f \in K[H] \mid \forall x \in G : f(x) = 0\}$$

das Verschwindungsideal von G in $K[H]$.

Zeigen Sie: $G = \{g \in H \mid I\rho_g^* \subseteq I\}$, wobei $\rho_g^*: K[H] \rightarrow K[H]$ jeweils die Rechtstranslation mit g bezeichnet.

Aufgabe 10.3

Sei W ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K , und seien $\sigma, \tau \in \text{End}_K(W)$ mit $\sigma\tau = \tau\sigma$. Zeigen Sie:

- (a) Sind σ, τ nilpotent, so sind auch $\sigma + \tau$ und $\sigma\tau$ nilpotent.
- (b) Sind σ, τ unipotent, so ist auch $\sigma\tau$ unipotent; im allgemeinen ist $\sigma + \tau$ jedoch nicht unipotent.
- (c) Sind σ, τ diagonalisierbar, so sind auch $\sigma + \tau$ und $\sigma\tau$ diagonalisierbar.

Belegen Sie durch geeignete Beispiele, daß die positiven Aussagen in (a), (b) und (c) generell nicht mehr richtig sind, wenn die Bedingung $\sigma\tau = \tau\sigma$ fallen gelassen wird.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.4

Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K . Seien $\sigma \in \text{End}_K(V)$ und $\tau \in \text{End}_K(W)$ lineare Endomorphismen, deren Eigenwerte alle bereits in K liegen.

Zeigen Sie für $\sigma \otimes \tau \in \text{End}_K(V \otimes_K W)$:

$$(\sigma \otimes \tau)_s = \sigma_s \otimes \tau_s \quad \text{und, sofern } \sigma, \tau \text{ invertierbar sind,} \quad (\sigma \otimes \tau)_u = \sigma_u \otimes \tau_u.$$

Aufgabe 10.5

Da die Sylvesterparty dieses Jahr ausfällt, hat Onkel Erwin, der Spaßvogel der Familie, eine große Schachtel geschickt. In dieser liegen 4 kleinere Schachteln. In jeder dieser kleineren Schachteln liegt jeweils entweder ein Gummibärchen oder es liegen darin 4 weitere noch kleinere Schachteln. In jeder dieser noch kleineren Schachteln liegt jeweils entweder ein Gummibärchen oder es liegen darin noch weitere 4 Schachteln, usw. Insgesamt sollen es genau 673 Schachteln sein, in denen kein Gummibärchen liegt.

Bestimmen Sie möglichst genau, wie viele Gummibärchen die Kinder, die Onkel Erwins Sendung erhalten haben, im Laufe des langen Sylvesterabends auspacken können.

Frohe Weihnachten und kommen Sie gut ins neue Jahr!