

## Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 9

Abgabe der Lösungen am 17.12.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 9.2 und 9.4 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

[http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI\\_WS2526/](http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/).

### Aufgabe 9.1

- (a) Zeigen Sie, daß über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  mit  $\text{char}(K) \neq 2$  die spezielle orthogonale Gruppe  $\text{SO}_2$  isomorph zu der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{G}_m$  ist.
- (b) Erläutern Sie, wieso die reelle spezielle orthogonale Gruppe  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  nicht isomorph zur reellen multiplikativen Gruppe  $\mathbb{R}^*$  ist.

### Aufgabe 9.2

(4 Punkte)

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(K) \neq 2$ . Betrachten Sie die orthogonale Gruppe sowie die spezielle orthogonale Gruppe über  $K$ , also

$$\text{O}_n = \{x \in \text{Mat}_n(K) \mid x^{\text{tr}} \cdot x = 1\} \quad \text{und} \quad \text{SO}_n = \text{O}_n \cap \text{SL}_n.$$

- (a) Zeigen Sie, daß die sogenannte Cayley-Abbildung  $x \mapsto (1+x)^{-1}(1-x)$  einen Isomorphismus zwischen einer geeigneten nicht-leeren, offenen Teilmenge  $W$  von  $\text{SO}_n$  und einer nicht-leeren offenen Teilmenge der Varietät

$$V_n = \{a \in \text{Mat}_n(K) \mid a + a^{\text{tr}} = 0\}$$

aller schiefsymmetrischen  $n \times n$ -Matrizen liefert.

- (b) Beweisen Sie unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß sich zu passendem  $r \in \mathbb{N}$  jedes Element  $g \in \text{SO}_n$  als ein Produkt  $g = x_1 \cdots x_r$  von  $r$  geeigneten Elementen  $x_1, \dots, x_r \in W$  schreiben läßt: Die 1-Komponente der linearen algebraischen Gruppe  $\text{O}_n$  ist gerade  $\text{SO}_n$ .

### Aufgabe 9.3

Sei  $W$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ , und sei  $\sigma \in \text{End}_K(W)$ . Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen paarweise äquivalent sind:

- (a)  $\sigma$  ist nilpotent, d. h., es existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\sigma^m = 0$ .
- (b)  $\sigma^n = 0$  für  $n = \dim_K(W)$ .
- (c) Alle Eigenwerte von  $\sigma$  (in einem algebraischen Abschluß von  $K$ ) sind gleich 0.
- (d) Das charakteristische Polynom von  $\sigma$  ist gleich  $X^n$  für  $n = \dim_K(W)$ .

### Aufgabe 9.4

(4 Punkte)

- (a) Sei  $W$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ , und sei  $\sigma \in \text{End}_K(W)$ . Sei  $f = \sum_{i=0}^m c_i X^i \in K[X]$ .

Zeigen Sie: Ist  $a \in K$  ein Eigenwert von  $\sigma$ , so ist  $f(a) \in K$  ein Eigenwert von  $f(\sigma) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma^i \in \text{End}_K(W)$ .

- (b) Bestimmen Sie einen Endomorphismus  $\sigma \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  des reellen Standardvektorraums  $\mathbb{R}^2$  so, daß  $\sigma^2$  diagonalisierbar, aber  $\sigma$  selbst nicht diagonalisierbar über  $\mathbb{R}$  ist.