

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 8

Abgabe der Lösungen am 10.12.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 8.2 und 8.4 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Wir betrachten Varietäten und algebraische Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $K = \overline{K}$. Seien zudem $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8.1

Seien $V = \mathfrak{V}(XY) \subseteq K^2$ und $W = \mathfrak{V}(Y(Y - X^2)) \subseteq K^2$. Zeigen Sie, daß V und W , jeweils ausgestattet mit der Zariski-Topologie, homöomorph zueinander sind. Erläutern Sie, warum die affinen algebraischen Varietäten $(V, \mathcal{O}_V)$ und $(W, \mathcal{O}_W)$ jedoch nicht isomorph zueinander sind.

Aufgabe 8.2

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $\eta: \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$,

$$\left((x_0 : \dots : x_m), (y_0 : \dots : y_n)\right) \mapsto (x_0 y_0 : \dots : x_0 y_n : x_1 y_0 : \dots : x_1 y_n : \dots : x_m y_n).$$

Zeigen Sie, daß das Bild von η eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq_{\text{abg}} \mathbb{P}^{mn+m+n}$ bildet, und verifizieren Sie anhand geeigneter offener affiner Teilmengen, daß η einen Isomorphismus zwischen der Produktvarietät $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ und B liefert.

Aufgabe 8.3

(a) Zeigen Sie, daß die additive und die multiplikative Gruppe, $\mathbb{G}_a$ und $\mathbb{G}_m$, nicht isomorph zueinander sind.

(b) Zeigen Sie: Die in der Vorlesung vorgestellten algebraischen Gruppen $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$, SL_n , GL_n , D_n , B_n , U_n sind jeweils zusammenhängend.

Erläutern Sie im Gegensatz dazu: Für $\text{char}(K) \neq 2$ ist die algebraische Gruppe O_n nicht zusammenhängend.

Aufgabe 8.4

(4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Das Zentrum $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : gx = xg\}$ einer algebraischen Gruppe G ist eine (Zariski-)abgeschlossene Untergruppe von G .

(b) Sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe, und N ein endlicher Normalteiler von G . Zeigen Sie: Dann liegt N bereits im Zentrum von G .

Hinweis. Betrachten Sie für $y \in N$ die Abbildung $G \rightarrow N$, $x \mapsto xyx^{-1}$.

Aufgabe 8.5

Die Konjugationswirkung von SL_2 auf $\text{Mat}_2(K) \cong K^4$ liefert einen Homomorphismus $\alpha: \text{SL}_2 \rightarrow \text{GL}_4$ zwischen algebraischen Gruppen. Erläutern Sie: $\alpha(\text{SL}_2)$ kann als affine algebraische Gruppe PSL_2 verstanden werden. Bestimmen Sie dazu insbesondere das Bild B der Koordinatenalgebra $K[\text{PSL}_2]$ unter α^* , als Teilalgebra von der Koordinatenalgebra

$$A = K[\text{SL}_2] \cong K[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}] / \langle X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} - 1 \rangle.$$

Formulieren und überprüfen Sie, für $\text{char}(K) \neq 2$, die Eigenschaft von PSL_2 als „Faktorgruppe“ von SL_2 nach $Z(\text{SL}_2)$ innerhalb der Kategorie der affinen algebraischen Gruppen.