

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 7

Abgabe der Lösungen am 03.12.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 7.4 und 7.5 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Für alle Aufgaben sei $K = \overline{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, und es sei $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.1

- (a) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und seien A, B kommutative R -Algebren. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $A \otimes_R B$ der Algebren A, B innerhalb der Kategorie der kommutativen R -Algebren.
- (b) Erläutern Sie anhand von (a) und geeigneter Ergebnisse aus der Vorlesung die universelle Eigenschaft des Produktes $V \times W \subseteq K^{m+n}$ von algebraischen Mengen $V \subseteq K^m$ und $W \subseteq K^n$ innerhalb der Kategorie der algebraischen Mengen über K .

Aufgabe 7.2

- (a) Sei $V \subseteq K^n$ eine algebraische Menge. Begründen Sie, daß $\Delta_V = \{(x, x) \mid x \in V\}$ Zariski-abgeschlossen in $V \times V \subseteq K^{2n}$ ist.
- (b) Seien $\alpha, \beta: V \rightarrow W$ Morphismen zwischen algebraischen Varietäten über K . Zeigen Sie: Stimmen α und β auf einer dichten Teilmenge von V überein, so gilt bereits $\alpha = \beta$.

Aufgabe 7.3

- (a) Sei $X = (X, \mathcal{O})$ ein geringter Raum über K und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, daß $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ einen geringten Raum darstellt, wobei Y die Unterraumtopologie trägt und

$$\mathcal{O}|_Y(V) = \{f: V \rightarrow K \mid \forall x \in V \exists U \subseteq_{\text{off}} X \exists g \in \mathcal{O}_X(U) : x \in U \wedge f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}\}$$

für $\emptyset \neq V \subseteq_{\text{off}} Y$ gesetzt wird.

- (b) Sei nun $V = (V, \mathcal{O}_V)$ eine algebraische Varietät über K . Erläutern Sie, wie auf abgeschlossenen bzw. offenen Teilmengen $W \subseteq V$ die Struktur einer algebraischen Varietät $W = (W, \mathcal{O}_W)$ induziert wird.

Aufgabe 7.4

(4 Punkte)

Sei V eine irreduzible algebraische Menge über K , und sei $f \in K(V)$.

Zeigen Sie: Die Menge $\{x \in V \mid f \text{ ist irregulär in } x\}$ ist Zariski-abgeschlossen in V .

Aufgabe 7.5

(4 Punkte)

Betrachten Sie die algebraische Menge $V = K^2$, d. h. den 2-dimensionalen affinen Raum.

- (a) Sei $U = V \setminus \{(0, 0)\}$. Zeigen Sie, daß jede rationale Funktion $f \in K(V)$, die regulär auf U ist, bereits regulär auf V ist. Folgern Sie $\mathcal{O}_V(U) \cong K[V]$.

- (b) Sei $U = V \setminus \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{O}_V(U)$.

Hinweis. Schreiben Sie U jeweils als Vereinigung von elementar-offenen Teilmengen.