

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 6

Abgabe der Lösungen am 26.11.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 6.3 und 6.4 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluß $\overline{K}$, und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.1

Sei $K = \overline{K}$ algebraisch abgeschlossen und $V \subseteq K^n$ eine algebraische Menge. Es bezeichne $\text{MSpec}(K[V]) = \{I \trianglelefteq K[V] \mid I \text{ maximal}\}$ die Menge der maximalen Ideale des Koordinatenrings $K[V]$ sowie $\text{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[V], K)$ die Menge der K -Algebrenhomomorphismen von $K[V]$ nach K . Beschreiben und erläutern Sie kanonische Bijektionen $V \rightarrow \text{MSpec}(K[V])$ und $\text{MSpec}(K[V]) \rightarrow \text{Hom}_{K\text{-Alg}}(K[V], K)$.

Zusatz. Was passiert, wenn K nicht algebraisch abgeschlossen ist? Betrachten und beschreiben Sie die Situation im Beispiel $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.2

Sei $K = \overline{K}$ algebraisch abgeschlossen und $V = \mathfrak{V}(X^3 - Y^2) \subseteq K^2$. Vergewissern Sie sich, daß V eine irreduzible algebraische Menge ist, und betrachten Sie sodann den Koordinatenring $K[V] = K[x, y]$, wobei x, y die Koordinatenfunktionen $\overline{X}, \overline{Y}$ bezeichnen, und den Funktionenkörper $K(V) = K(x, y)$.

(a) Beachten Sie, daß $x, y \neq 0$ in $K(V)$ sind, und finden Sie heraus, welche der rationalen Funktionen x^{-1} , yx^{-1} und $(yx^{-1})^2$ regulär in $(0, 0)$ sind.

(b) Zeigen Sie: $K(V)$ ist eine einfache transzendente Erweiterung von K , also $K(V) = K(z)$ für ein über K transzendentes Element z , aber $K[V]$ ist nicht isomorph zu dem Polynomring in einer Variablen über K .

Aufgabe 6.3

(4 Punkte)

(a) Welche Abbildungen $\varphi: \overline{K} \rightarrow \overline{K}$ sind stetig bzgl. der Zariski- $(\overline{K})$ -Topologie? Begründen Sie Ihre Antwort, und folgern Sie: Jede Bijektion von $\overline{K}$ auf sich ist bereits ein Homöomorphismus.

Zusatz. Welche Abbildungen $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig und welche Bijektionen sind Homöomorphismen bzgl. der Zariski- $\mathbb{R}$ -Topologie?

(b) Bestimmen Sie alle Isomorphismen von der K -algebraischen Menge $\overline{K}$ auf sich, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit demjenigen für Homöomorphismen aus (a).

(c) Es seien $V = \overline{K}$ und $W = \mathfrak{V}(X^3 - Y^2) \subseteq \overline{K}^2$. Erläutern Sie: $\alpha: V \rightarrow W, z \mapsto (z^2, z^3)$ ist ein bijektiver Morphismus zwischen K -algebraischen Mengen. Ist $\alpha: V \rightarrow W$ ein Homöomorphismus bzgl. der Zariski- $(\overline{K})$ -Topologie?

Zusatz. Ist $\alpha: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus zwischen K -algebraischen Mengen?

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4

(4 Punkte)

Sei $K = \overline{K}$ algebraisch abgeschlossen, und seien $V \subseteq K^m$ und $W \subseteq K^n$ algebraische Mengen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Anzahlen der irreduziblen Komponenten von V, W und der Anzahl der irreduziblen Komponenten von $V \times W \subseteq K^{m+n}$? (Welche Abschätzungen oder ggf. präzise Formeln gelten?)

Zusatz. Was passiert, wenn K nicht algebraisch abgeschlossen ist? Betrachten Sie die Situation im Beispiel $K = \mathbb{R}$ und stellen Sie geeignete Vermutungen auf.

Aufgabe 6.5

Die nachfolgenden Überlegungen sind fehlerhaft. Was ist schiefgelaufen?

Sei $f \in K[X, Y]$ irreduzibel. Dann ist $fK[X, Y]$ ein Primideal in $K[X, Y]$ und folglich das Nullstellengebilde $V = \mathfrak{V}(f)$ irreduzibel.

Offenbar ist V aber auch die Vereinigung disjunkter abgeschlossener Teilmengen, nämlich der Mengen $W_a = \{a\} \times \mathfrak{V}(g_a)$ für $a \in K$, wobei $g_a = f(a, Y) \in K[Y]$ durch Spezialisierung der ersten Koordinate entsteht. Eine ähnliche Zerlegung ergibt sich durch Spezialisierung der zweiten Koordinate. Für $|V| \geq 2$ besteht wenigstens eine der Zerlegungen aus echten Teilmengen. Für K endlich ist daher V als endliche Vereinigung von echten abgeschlossenen Teilmengen gar nicht irreduzibel. Ein ungewollter Widerspruch!