

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 5

Abgabe der Lösungen am 19.11.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 5.3 und 5.4 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Aufgabe 5.1

- (a) Bestimmen Sie, bis auf Homöomorphie,¹ alle topologischen Räume, die zugleich hausdorffsch und irreduzibel sind.
- (b) Ist $\mathbb{R}$ bzgl. der euklidischen Topologie noethersch?
- (c) Beschreiben Sie die noetherschen Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$ bzgl. der euklidischen Topologie.
- (d) Beschreiben Sie die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ bzgl. der Zariski- $\mathbb{R}$ -Topologie. Welche dieser Mengen sind irreduzibel?

Aufgabe 5.2

Sei $K = \overline{K} = \mathbb{C}$, und seien

$$f = X^2 + Y^2, \quad g = XY - 1, \quad h = X^2 - Y \quad \in K[X, Y]$$

sowie

$$U = \mathfrak{V}(f), \quad V = \mathfrak{V}(g), \quad W = \mathfrak{V}(h) \subseteq \mathbb{C}^2.$$

- (a) Fertigen Sie Skizzen von $A \cap \mathbb{R}^2$ für $A \in \{U, V, W\}$ an.
- (b) Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten von A für $A \in \{U, V, W\}$.
- (c) Untersuchen Sie Morphismen, d.h. polynomiale Abbildungen, $\alpha: A \rightarrow B$ für $A, B \in \{U, V, W\}$. In welchen Konstellationen gibt es injektive, surjektive bzw. bijektive Morphismen? In welchen Konstellationen sogar Isomorphismen?

Hinweis. Denken Sie an die zugehörigen Koordinatenringe.

Aufgabe 5.3

(4 Punkte)

Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluß $\overline{K}$, und sei $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Erläutern Sie: Die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}_n(\overline{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\overline{K}) \mid AA^\top = \mathrm{Id}_n\},$$

wobei $A^\top$ die zu A transponierte Matrix bezeichnet, ist in natürlicher Weise eine K -algebraische Menge.

- (b) Sei zusätzlich $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Ist $\mathrm{O}_n(\overline{K})$ irreduzibel bzgl. der Zariski- K -Topologie?
- (c) Erläutern Sie, wie die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\overline{K})$ in natürlicher Weise als eine K -algebraische Menge verstanden werden kann, indem Sie eine geeignete Einbettung $\mathrm{GL}_n(\overline{K}) \hookrightarrow \mathrm{SL}_{n+1}(\overline{K})$ verwenden. Ist $\mathrm{GL}_n(\overline{K})$ irreduzibel bzgl. der Zariski- K -Topologie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

¹d.h. bis auf „Isomorphie“ zwischen topologischen Räumen

Aufgabe 5.4

(4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie möglichst konkret die folgenden Tensorprodukte von Algebren:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X, Y], \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad K[X] \otimes_K K[Y_1, Y_2], \quad \mathbb{F}_7 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

wobei K einen beliebigen Körper und $\mathbb{F}_7$ den Körper mit sieben Elementen bezeichnen.

(b) Zeigen Sie: $V = \{i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ ist irreduzibel bzgl. der Zariski- $\mathbb{R}$ -Topologie, indem Sie den Koordinatenring $\mathbb{R}[V]$ bestimmen.

Überlegen Sie sodann: $V \times V = \{(i, i), (i, -i), (-i, i), (-i, -i)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ ist nicht irreduzibel bzgl. der Zariski- $\mathbb{R}$ -Topologie. Bestimmen Sie weiter die irreduziblen Komponenten.

Hinweis. Nutzen Sie ggf. die Identität $(XY + 1)(XY - 1) = (X^2 + 1)Y^2 - (Y^2 + 1)$.

Zusatz. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis in (b) in Hinblick auf den Galoisautomorphismus, der durch komplexe Konjugation gegeben ist.