

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 4

Abgabe der Lösungen am 12.11.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 4.2 und 4.3 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluß $\overline{K}$, und sei $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.1

Sei $\overline{S}$ der topologische Abschluß von $S \subseteq \overline{K}^n$ bezüglich der Zariski- K -Topologie und $\mathfrak{I}(S) \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ das Verschwindungsideal von S . Zeigen Sie: $\overline{S} = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(S))$.

Aufgabe 4.2

(4 Punkte)

(a) Für topologische Räume X, Y ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ wie folgt definiert: Die offenen Teilmengen von $X \times Y$ sind genau die Vereinigungen von beliebigen Familien von Teilmengen der Form $U \times V$ mit $U \subseteq_{\text{off}} X$ und $V \subseteq_{\text{off}} Y$. Zeigen Sie: Ein topologischer Raum ist hausdorffsch genau dann, wenn die *Diagonale* $D = \{(x, x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie: Die Diagonale $D = \{(x, x) \mid x \in \overline{K}\}$ ist bezüglich der Zariski- K -Topologie abgeschlossen in $\overline{K}^2$, aber D ist nicht abgeschlossen in $\overline{K}^2 = \overline{K}^1 \times \overline{K}^1$ bezüglich der Produkttopologie, die von den Zariski- K -Topologien auf den einzelnen Faktoren $\overline{K}^1$ herrührt.

Aufgabe 4.3

(4 Punkte)

Zeigen Sie, daß die algebraische Menge $V = \{(x, y) \in \overline{K}^2 \mid xy = 0\}$ bezüglich der Zariski- K -Topologie zusammenhängend, aber nicht irreduzibel ist. Bestimmen Sie weiter die irreduziblen Komponenten von V .

Aufgabe 4.4

Sei V eine K -abgeschlossene Teilmenge von $\overline{K}^n$ mit Koordinatenring $K[V]$. Zeigen Sie:

(i) Für jedes $I \trianglelefteq K[V]$ gilt $\mathfrak{I}_V(\mathfrak{V}_V(I)) = \text{Rad}_{K[V]}(I)$.

(ii) Durch $W \mapsto \mathfrak{I}_V(W)$ wird die Menge der K -abgeschlossenen Teilmengen W von V bijektiv und inklusionsumkehrend auf die Menge der Radikalideale von $K[V]$ abgebildet. Die Umkehrabbildung ist durch $J \mapsto \mathfrak{V}_V(J)$ gegeben.

(iii) Unter $W \mapsto \mathfrak{I}_V(W)$ entsprechen die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen W von V eineindeutig den Primidealen von $K[V]$. Die irreduziblen Komponenten von V entsprechen eineindeutig den $\subseteq$ -minimalen Primidealen von $K[V]$. (Insbesondere ist die Anzahl der letzteren endlich.)

Hinweis. Verallgemeinern Sie die entsprechenden Aussagen für $V = \overline{K}^n$, die Ihnen aus der Vorlesung bereits bekannt sind.