

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 3

Abgabe der Lösungen am 05.11.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 3.2 und 3.5 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Aufgabe 3.1

(a) Sei R ein kommutativer Ring und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

$$\text{Rad}_R(I) = \sqrt{I} =_{\text{def}} \{r \in R \mid \exists m \in \mathbb{N} : r^m \in I\}$$

ist ein Ideal von R und es gilt $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$, d. h., $\sqrt{I}$ ist ein Radikalideal von R .

(b) Sei $R \leq S$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe mit 1. Sei $Q \trianglelefteq_{\text{prim}} S$ ein Primideal und $P = R \cap Q$. Zeigen Sie: (i) $P \trianglelefteq_{\text{prim}} R$ und (ii) $Q \trianglelefteq_{\text{max}} S \Leftrightarrow P \trianglelefteq_{\text{max}} R$.

Aufgabe 3.2

(4 Punkte)

Sei K ein Körper, $\overline{K}$ der algebraische Abschluß von K , und sei $n \in \mathbb{N}$. Wie in der Vorlesung eingeführt, bezeichne $\mathfrak{V}(I) \subseteq \overline{K}^n$ die K -algebraische Menge¹ zu $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathfrak{I}(V) \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ das Verschwindungsideal von $V \subseteq \overline{K}^n$. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{I}(\emptyset) = K[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathfrak{I}(\overline{K}^n) = 0$.

(b) Ist $V \subseteq \overline{K}^n$ eine K -algebraische Menge, so gilt $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = V$.

(c) Sind $V, W \subseteq \overline{K}^n$, so gilt $\mathfrak{I}(V \cup W) = \mathfrak{I}(V) \cap \mathfrak{I}(W)$.

Aufgabe 3.3

Sei $K = \overline{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Teilmengen von K^n sind algebraische Mengen? (Begründen Sie knapp Ihre Antwort.)

(i) K^n und die leere Menge $\emptyset$;

(ii) beliebige endliche Teilmengen von K^n ;

(iii) für $K = \mathbb{C}$ und $n = 2$ die Menge $\{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid \text{Re}(w) = \text{Im}(z)\}$;

(iv) für $K = \mathbb{C}$ und $n = 2$ die Menge $\{(z^2, z^3) \mid z \in \mathbb{C}\}$.

Aufgabe 3.4

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, daß die Menge $\text{Spec}(R)$ aller Primideale von R , das sogenannte *Spektrum* von R , eine Topologie besitzt, bezüglich derer die abgeschlossenen Teilmengen von $\text{Spec}(R)$ genau die Mengen

$$Z(I) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid P \supseteq I\}$$

sind, wobei I alle Ideale von R durchläuft.

Aufgabe 3.5

(4 Punkte)

Sei T ein topologischer Raum. Zeigen Sie mit Hilfe des Zornschen Lemmas: Jede irreduzible Teilmenge $S \subseteq T$ ist in wenigstens einer irreduziblen Komponente von T enthalten.

¹also das Nullstellengebilde