

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 2

Abgabe der Lösungen am 29.10.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Bitte reichen Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 2.1 und 2.3 ein. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Sei K ein Körper.

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

- (a) Sei S eine ganze Ringerweiterung des Körpers K und zugleich ein Integritätsbereich. Zeigen Sie: Dann ist S bereits ein Körper.
- (b) Zeigen Sie: $K[t]/t^2K[t]$ ist eine ganze Ringerweiterung des Körpers K , aber kein Integritätsbereich.

Aufgabe 2.2

Sei L eine Körpererweiterung von K und $A \subseteq L$. Es bezeichne

$$H_{L|K}(A) = \{b \in L \mid b \text{ algebraisch über } K(A)\}$$

die algebraische Hülle von A in L über K .¹

Zeigen Sie: A ist algebraisch unabhängig über K genau dann, wenn für alle $a \in A$ gilt: $a \notin H_{L|K}(A \setminus \{a\})$.

Hinweis. Erinnern Sie sich an eine ähnliche Kennzeichnung des Begriffs der linearen Unabhängigkeit in der linearen Algebra. Stellen Sie als erstes fest, daß es genügt, den Fall $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $n = |A| < \infty$ zu betrachten.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

- (a) Sei L eine Körpererweiterung von K , und sei $B \subseteq L$ eine $\subseteq$ -maximale über K algebraisch unabhängige Teilmenge. Zeigen Sie: Dann ist L algebraisch über $K(B)$.

Bemerkung. Solch eine maximale algebraisch unabhängige Teilmenge wird *Transzendenzbasis* für L über K genannt.

- (b) Verwenden Sie das Zornsche Lemma, um zu beweisen: Jede Körpererweiterung L von K besitzt wenigstens eine Transzendenzbasis über K .

Aufgabe 2.4

Überlegen Sie sich anhand der folgenden Hinweise einen (leicht naheliegenderen) Beweis des Noetherschen Normalisierungslemmas für *unendliche* Grundkörper K .

Sei $A = K[x_1, \dots, x_n]$ eine kommutative, endlich erzeugte K -Algebra, wobei wir annehmen dürfen: $n \geq 1$ und $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ für geeignetes $f \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. Setze $m = \text{grad}(f)$ und schreibe $f = g_0 + \dots + g_m$ als Summe von homogenen Polynomen g_i vom Grad $i \in \{0, \dots, m\}$. Wegen $g_m \neq 0$ ist dann $g_m(X_1, \dots, X_{n-1}, 1) \in K[X_1, \dots, X_{n-1}] \setminus \{0\}$ (warum?). Nach Aufgabe 1.2 finden sich $b_1, \dots, b_{n-1} \in K$ mit $g_m(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) \neq 0$. Arbeite nun, ähnlich wie im Beweis aus der Vorlesung, mit der Variablentransformation $\tilde{x}_i = x_i - b_i x_n$, für $1 \leq i \leq n-1$.

¹NB: Aus der Algebra-Vorlesung wissen wir, daß $H_{L|K}(A)$ ein Zwischenkörper von $L|K$ ist.