

Gruppentheorie I (Algebraische Gruppen) – Blatt 1

Abgabe der Lösungen am 22.10.2025, in der Übungsstunde, um 12.30 Uhr

Diese Blatt besteht zumeist aus Präsenzaufgaben für die ersten Übungsstunden. Die Aufgaben 1.2 und 1.4 sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben.

Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenI_WS2526/.

Für das Weitere sei R ein kommutativer Ring mit 1, und sei K ein Körper.

Aufgabe 1.1

Belegen Sie durch Angabe eines konkreten Beispiels, daß eine endlich erzeugte kommutative R -Algebra im allgemeinen nicht endlich über R ist.

Aufgabe 1.2

(4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Ist K unendlich, dann existieren unendlich viele $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ mit $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Hinweis. Schreiben Sie f als Polynom in X_n mit Koeffizienten aus $K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ und verwenden Sie Induktion nach n .

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, daß der Körper $K(X_1, \dots, X_n)$ aller über K rationalen Funktionen in n Unbestimmten als K -Algebra nicht endlich erzeugt ist.

Hinweis. Der Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$ ist gaußsch und besitzt unendlich viele paarweise nicht zueinander assoziierte Primelemente. Jedes Element von $K(X_1, \dots, X_n)$ läßt sich als gekürzter Bruch von Polynomen schreiben. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 1.4

(4 Punkte)

Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}]$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.¹

Zusatz. Ist $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}]$ ganzabgeschlossen?² – Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.5

Zeigen Sie, daß jeder gaußsche Ring ganzabgeschlossen ist.

Hinweis. Überlegen Sie zunächst, warum die Aussage für $\mathbb{Z}$ richtig ist.

¹Für eine Erweiterung $R \leq S$ kommutativer Ringe, mit Einselementen $1_R = 1_S$, heißt definitionsgemäß S ganz über R , falls jedes Element $s \in S$ ganz über R ist, d. h., stets ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ mit $f(s) = 0$ existiert.

²Definitionsgemäß ist ein Integritätsbereich R ganzabgeschlossen, falls jedes Element des Quotientenkörpers von R , welches ganz über R ist, bereits in R liegt.