

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 14

Abgabe der Lösungen bis 24.07.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 14.1 und 14.2 ab, wenn Sie noch Zusatzpunkte erwerben möchten, und bereiten Sie die Aufgaben ansonsten nach Möglichkeit für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 14.1

(+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Bis auf Äquivalenz gibt es insgesamt acht verschiedene zentrale Erweiterungen $1 \rightarrow C_2 \rightarrow E \rightarrow C_2 \times C_2 \rightarrow 1$ von C_2 mit $C_2 \times C_2$. Bestimmen Sie für jede der resultierenden Gruppen der Ordnung 8 den zugehörigen Isomorphietyp.

(b) Sei p eine ungerade Primzahl. Finden Sie zwei nicht äquivalente zentrale Erweiterungen $1 \rightarrow C_p \rightarrow E_i \rightarrow C_p \rightarrow 1$ für $i \in \{1, 2\}$, mit $E_1 \cong E_2$ als Gruppen.

Aufgabe 14.2

(+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für eine Familie G_i , $i \in I$, von abelschen proendlichen Gruppen gilt

$$\left(\prod_{i \in I} G_i \right)^* \cong \bigoplus_{i \in I} G_i^* \quad (\text{als topologische Gruppen}).$$

(b) Zeigen Sie: Für eine Familie A_i , $i \in I$, von abelschen diskreten Torsionsgruppen gilt

$$\left(\bigoplus_{i \in I} A_i \right)^* \cong \prod_{i \in I} A_i^* \quad (\text{als topologische Gruppen}).$$

Zusatzaufgabe 14.3

Sei $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das Einheitsintervall, ausgestattet mit der euklidischen Topologie.

Zeigen Sie: Der Raum $C(I, I)$ aller stetigen Funktionen $f: I \rightarrow I$ ist bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie hausdorffsch, aber nicht kompakt.

ALLES GUTE FÜR DIE VORLESUNGSFREIE ZEIT!