

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 13

Abgabe der Lösungen bis 17.07.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 13.1 und 13.2 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 13.1

(4 Punkte)

Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von endlichen Gruppen, die unter der Bildung von Untergruppen und direkten Produkten abgeschlossen ist. Sei X ein topologischer Raum.

Eine freie pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppe, basierend auf X , ist eine pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppe F zusammen mit einer stetigen Abbildung $\iota: X \rightarrow F$ dergestalt, daß es zu jeder stetigen Abbildung $\xi_0: X \rightarrow G$ in eine pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppe G genau einen stetigen Homomorphismus $\xi: F \rightarrow G$ mit $\xi_0 = \iota\xi$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine freie pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppe, basierend auf X , und diese ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Hinweis: Konstruieren Sie die freie pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppe aus einer freien (abstrakten) Gruppen Γ mit Basis $X \subseteq \Gamma$, indem Sie sich die Normalteilerfilterbasis

$$\mathfrak{F} = \{\Delta \trianglelefteq \Gamma \mid \Gamma/\Delta \text{ in } \mathfrak{K} \text{ und } \forall \gamma \in \Gamma: X \cap \gamma\Delta \subseteq_{\text{off}} X\}$$

zu Nutze machen.

(b) Erläutern Sie, wieso diese Begriffsbildung das in der Vorlesung eingeführte Konzept (eingeschränkter) freier pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppen scheinbar verallgemeinert.

Aufgabe 13.2

(4 Punkte)

Sei G eine proendliche Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Sind A, B topologische G -Moduln, so gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$H^n(G, A \oplus B) \cong H^n(G, A) \oplus H^n(G, B).$$

(b) Erläutern Sie: Ist G projektiv und M ein proendlicher G -Modul, so gilt $H^2(G, M) = 0$.

Aufgabe 13.3

Sei G eine proendliche Gruppe, M ein proendlicher G -Modul sowie $1 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$ eine zerfallende Erweiterung vom Typ (M, G) .

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion zwischen $\text{Der}(G, M)$ und der Menge aller Komplemente zu $M\iota$ in E .

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion zwischen $H^1(G, M)$ und der Menge der Konjugationsklassen von Komplementen zu $M\iota$ in E .

(c) Folgern Sie: Ist $H^1(G, M) = 0$, so sind je zwei Komplemente zu $M\iota$ in E konjugiert zueinander.

(d) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Sei $G = \langle t \rangle \cong C_2$ und $M = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, wobei $a.t = -a$ sei. Bestimmen Sie $\text{Der}(G, M)$ sowie $H^1(G, M)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit einer Liste aller Komplemente zu $\langle a \rangle$ in der Diedergruppe $D_{2m} = \langle a, t \mid a^m = t^2 = 1 \text{ und } a^t = a^{-1} \rangle$ sowie deren Einteilung in Konjugationsklassen.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.4

Sei F eine freie proendliche Gruppe, basierend auf einer 1-konvergenten Menge $X \subseteq F$. Für eine Teilmenge $R \subseteq F$ bezeichne K_R den kleinsten abgeschlossenen Normalteiler von F der R enthält; das heißt,

$$K_R = \overline{\langle \{r^g \mid r \in R, g \in F\} \rangle} \trianglelefdeq_{\text{abg}} F.$$

Ist eine proendliche Gruppe G isomorph zur Faktorgruppe F/K_R , so sagt man G ist *präsentiert durch Erzeugende X und Relationen R* . Man schreibt kurz

$$G \cong \langle X \mid R \rangle \tag{*}$$

und nennt dies eine (*proendliche*) *Präsentation* von G . Eine Präsentation $(*)$ heißt *endlich*, falls die Mengen X und R endlich sind. Existiert eine endliche Präsentation von G , dann nennt man G *endlich präsentierbar*.

- (a) Finden Sie eine endliche Präsentation der proendlichen Gruppe $\mathbb{Z}_p$.
- (b) Sei G eine endlich präsentierbare proendliche Gruppe. Zeigen Sie: Jede offene Untergruppe $H \leq_{\text{off}} G$ ist endlich präsentierbar.
- (c) Zeigen Sie, daß jede endlich erzeugte, projektive proendliche Gruppe schon endlich präsentierbar ist.

Bemerkung: Insbesondere sind endlich erzeugte freie pro- p -Gruppen stets endlich präsentierbare proendliche Gruppen.