

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 12

Abgabe der Lösungen bis 10.07.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 12.1 und 12.2 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 12.1

(4 Punkte)

Nach Malcev (1940) bzw. Iwasawa (1943) gilt: Ist $\Gamma = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ eine freie (abstrakte) Gruppe von endlichem Rang n , so ist Γ für jede Primzahl p residuell eine endliche p -Gruppe, d.h., es ist

$$\bigcap \{ \Delta \trianglelefteq \Gamma \mid \Gamma/\Delta \text{ eine endliche } p\text{-Gruppe} \} = 1.$$

Folgern Sie daraus für beliebiges (nicht notwendigerweise endliches!) X : Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse von endlichen Gruppen, die unter der Bildung von Untergruppen, Faktorgruppen und Gruppenerweiterung abgeschossen ist, besitzt $\mathfrak{K}$ zudem nicht-triviale Gruppen und ist F eine freie pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppe basierend auf $X \subseteq F$, so ist die (abstrakte) Gruppe $\Gamma = \langle X \rangle$ frei mit Basis $X \subseteq \Gamma$.

Hinweis: Verwenden Sie die Ihnen bekannte Konstruktion freier pro- $\mathfrak{K}$ Gruppen aus freien (abstrakten) Gruppen. Ist Γ eine freie (abstrakte) Gruppe mit Basis $X \subseteq \Gamma$ und ist

$$F = \widehat{\Gamma}_{\mathfrak{F}} \quad \text{mit} \quad \delta: \Gamma \rightarrow \widehat{\Gamma}_{\mathfrak{F}}$$

die Vervollständigung von Γ bzgl. der durch die Normalteilerfilterbasis $\mathfrak{F} = \{ \Delta \trianglelefteq \Gamma \mid \Gamma/\Delta \text{ in } \mathfrak{K} \text{ und } |X \setminus \Delta| < \infty \}$ erklärten Topologie, so ist F (bis auf Isomorphie) die freie pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppe basierend auf X mittels $\iota = \delta|_X: X \rightarrow F$.

Aufgabe 12.2

(4 Punkte)

Sei F eine freie proendliche Gruppe basierend auf $X \subseteq F$.

(a) Sei $Y \subseteq X$. Zeigen Sie: Die Gruppe $F_Y = \overline{\langle Y \rangle}$ ist eine freie proendliche Gruppe basierend auf Y .

(b) Sei $Y \subseteq X$. Sei $K = \overline{\langle x^g \mid x \in X \setminus Y, g \in F \rangle} \trianglelefteq_{\text{abg}} F$ und $\pi: F \rightarrow F/K$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie: F/K ist eine freie proendliche Gruppe basierend auf Y mittels $\pi|_Y: Y \rightarrow F/K$.

(c) Zeigen Sie: F ist in natürlicher Weise der inverse Limes von freien proendlichen Gruppen mit jeweils endlicher Basis.

(d) Unter welchen der in der Vorlesung stufenweise erhöhten Anforderungen an eine Klasse $\mathfrak{K}$ von endlichen Gruppen verallgemeinern sich die Aussagen in (a), (b) und (c) jeweils von freien proendlichen Gruppen auf freie pro- $\mathfrak{K}$ -Gruppen?

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3

Sei p eine Primzahl und G eine endlich erzeugte pro- p -Gruppe mit

$$d(H) - 1 = (d(G) - 1)|G : H| \quad \text{für alle } H \leq_{\text{off}} G.$$

Zeigen Sie: G ist eine freie pro- p -Gruppe.

Aufgabe 12.4

Sei G eine proendliche Gruppe. Ein *topologischer G -(Rechts-)Modul* M ist eine abelsche topologische Gruppe, auf der mittels einer stetigen Abbildung $M \times G \rightarrow M$ eine Modulstruktur definiert ist: Für $a, b \in M$ und $g, h \in G$ gelten

$$(a + b).g = a.g + b.g, \quad a.(gh) = (a.g).h, \quad a.1 = a.$$

Ein *proendlicher G -(Rechts-)Modul* ist der inverse Limes $M = \varprojlim_{i \in I} M_i$ eines inversen Systems $(M_i, \varphi_{ij})_I$ von endlichen diskreten topologischen G -Moduln M_i : Die zugehörige Modulstruktur ist durch die Abbildung $M \times G \rightarrow M$ gegeben, die mittels

$$(a.g)\varphi_i = (a\varphi_i).g \quad \text{für } a \in M \text{ und } g \in G$$

definiert wird; hierbei bezeichnet $\varphi_i: M \rightarrow M_i$ für jedes $i \in I$ die kanonische Abbildung, die dem inversen Limes $M = \varprojlim_{i \in I} M_i$ implizit zugehört.

(a) Verifizieren Sie, daß ein inverser Limes von endlichen diskreten G -Moduln wie oben eingeführt tatsächlich eindeutig die Struktur eines topologischen G -Moduls trägt.

(b) Sei M ein (abstrakter) G -Modul und gleichzeitig eine abelsche proendliche Gruppe. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen paarweise äquivalent sind:

- (i) M ist anhand der angegebenen algebraischen und topologischen Strukturen ein proendlicher G -Modul.
- (ii) M ist anhand der angegebenen Strukturen ein topologischer G -Modul.
- (iii) Die Menge

$$\{N \mid N \leq_{\text{off}} M \text{ ein } G\text{-Untermodul dergestalt, daß } M/N \text{ ein (diskreter) topologischer } G\text{-Modul ist}\}$$

bildet eine Umgebungsbasis für 0 in M .