

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 11

Abgabe der Lösungen bis 03.07.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 11.2 und 11.3 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 11.1

(a) Beweisen Sie den folgenden Spezialfall des *Baireschen Kategoriensatzes*.

Sei X ein topologischer Raum dergestalt, daß jede nicht-leere offene Teilmenge von X bereits eine nicht-leere kompakte offene Teilmenge enthält. Dann gilt: Enthält die Vereinigung $\bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ abzählbar vieler abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq_{\text{abg}} X$ eine nicht-leere offene Menge, so enthält bereits ein A_i eine nicht-leere offene Teilmenge von X .

Hinweis: Konstruieren Sie unter der Widerspruchsannahme, daß kein A_i eine nicht-leere offene Teilmenge enthält, eine geeignete absteigende Kette $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ von nicht-leeren kompakten offenen Teilmengen von X mit $U_n \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Folgern Sie aus dem Baireschen Kategoriensatz: Die Kardinalität einer proendlichen Gruppe ist entweder endlich oder überabzählbar.

Aufgabe 11.2

(4 Punkte)

Sei G eine proendliche Gruppe. Verwenden Sie den Baireschen Kategoriensatz (in der speziellen Form von Aufgabe 11.1), um folgende Aussagen zu beweisen.

(a) Ist G abelsch und periodisch (d. h., hat jedes Element von G endliche Ordnung), so hat G bereits endlichen Exponenten (d. h., es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 1$ für alle $x \in G$).

(b) Ist G periodisch, so existieren $g \in G$, $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$ und $n \in \mathbb{N}$ dergestalt, daß für alle $x \in gN$ gilt $x^n = 1$.

Bemerkung: Dies ist ein erster kleiner Schritt zu dem folgenden weitreichenden Ergebnis von Zelmanov (1992): Endlich erzeugte periodische pro- p -Gruppen sind stets endlich.

(c) Ist jede Konjugationsklasse von G endlich, so existieren $H \trianglelefteq_{\text{off}} G$ und $n \in \mathbb{N}$ dergestalt, daß für jedes $h \in H$ gilt: $|\{g^{-1}hg \mid g \in G\}| \leq n$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst für $m \in \mathbb{N}$: Die Elemente, die höchstens m Konjugierte haben, bilden eine abgeschlossene Teilmenge Y_m von G . Begründen und verwenden Sie später: $Y_{m_1}Y_{m_2} \subseteq Y_{m_1m_2}$ für $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 11.3

(4 Punkte)

Seien $G = \widehat{\mathbb{Z}} \times \text{Alt}(5)$ und $X = \{x\}$, wobei $x = (1, \text{id})$ einen topologischen Erzeuger des linken direkten Faktors bezeichne.

(a) Zeigen Sie, daß G und X die folgende universelle Eigenschaft besitzen: Ist $\xi_0: X \mapsto H$ eine beliebige Abbildung in eine proendliche Gruppe H mit $H = \overline{\langle X\xi_0 \rangle}$, so existiert genau ein stetiger Homomorphismus $\xi: G \rightarrow H$ mit $\xi_0 = \xi|_X$.

(b) Belegen Sie, daß G dennoch keine freie proendliche Gruppe basierend auf $X \subseteq G$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.4

Sei p eine Primzahl, und $K = \mathbb{Q}_p(\zeta)$ der Kreisteilungskörper, der aus $\mathbb{Q}_p$ durch Hinzufügen einer primitiven p ten Einheitswurzel entsteht.

(a) Zeigen Sie: Das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}_p$ ist $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$; folglich hat K den Grad $p-1$ über $\mathbb{Q}_p$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium.

(b) Sei $\pi = \zeta - 1$ und sei $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ der von $\mathbb{Z}_p$ und ζ erzeugte Unterring von K . Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ ist ein freier $\mathbb{Z}_p$ -Modul vom Rang $p-1$ und genauer $\mathbb{Z}_p[\zeta] = \mathbb{Z}_p \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}_p \cdot \pi \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p \cdot \pi^{p-2}$.

(c) Zeigen Sie: $O = \mathbb{Z}_p[\zeta]$ ist ein kompakter topologischer Ring mit einem einzigen maximalen Ideal, nämlich πO ; folglich läßt sich jedes von Null verschiedene Element von K eindeutig als $\pi^m u$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $u \in O^\times = O \setminus \pi O$ schreiben.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe von (c) eine Fortsetzung des auf $\mathbb{Q}_p$ definierten p -adischen Absolutbetrags (vgl. Aufgabenblatt 3) zu einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$ auf K . Zeigen Sie weiter: $O = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ und $\pi O = \{x \in K \mid |x| < 1\}$.

(e) Betrachten Sie nun die pro- p Gruppe $G = \langle z \rangle \rtimes A$, wobei $\langle z \rangle \cong C_p$ und $A = \mathbb{Z}_p[\zeta] \cong \mathbb{Z}_p^{p-1}$ seien sowie die Konjugation von z auf A der Multiplikation mit ζ auf $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ entspreche.

Zeigen Sie, daß sich G von zwei Elementen erzeugen läßt, und bestimmen Sie explizit die einzelnen Glieder der absteigenden Zentralreihe

$$\gamma_1(G) = G \quad \text{und} \quad \gamma_n(G) = \overline{[\gamma_{n-1}(G), G]} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Man nennt G eine „pro- p -Gruppe von maximaler Klasse“; was kann damit gemeint sein?