

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 9

Abgabe der Lösungen bis 19.06.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 9.1 und 9.2 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 9.1

(4 Punkte)

(a) Seien G und H endlich erzeugte proendliche Gruppen mit $\text{ggT}(|G|, |H|) = 1$. Zeigen Sie, daß $d(G \times H) = \max(d(G), d(H))$ ist.

(b) Sei $d \in \mathbb{N}$, und seien p, q ungerade Primzahlen mit $p \equiv_q 1$. Konstruieren Sie eine endliche Gruppe G der Ordnung $p^d q$ mit den folgenden Eigenschaften: Jede Sylowuntergruppe von G läßt sich von d Elementen erzeugen, aber $d(G) = d + 1$.

Bemerkung: Unter Verwendung der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen läßt sich zeigen (Guralnick und Lucchini, jeweils unabhängig, 1989):

Für jede endliche Gruppe G gilt

$$d(G) \leq 1 + \max\{d(S) \mid S \text{ eine Sylowuntergruppe von } G\}.$$

(c) Bestimmen Sie konkret eine Familie $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ endlicher Gruppen dergestalt, daß die proendliche Gruppe $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ endlich erzeugt, pronilpotent, aber nicht nilpotent ist.

(d) Sei G eine nicht-triviale endliche Gruppe, und für $i \in \mathbb{N}$ sei $G_i \cong G$, eine zu G isomorphe endliche Gruppe. Zeigen Sie: Die proendliche Gruppe $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ ist nicht endlich erzeugt.

Aufgabe 9.2

(4 Punkte)

Man nennt eine proendliche Gruppe G *hopfsch*, wenn jeder surjektive stetige Endomorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ bereits ein Isomorphismus ist.

(a) Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte proendliche Gruppe ist hopfsch.

(b) Geben Sie, mit Begründung, ein Beispiel für eine nicht-hopfsche proendliche Gruppe.

Aufgabe 9.3

Geben Sie, mit Begründung, ein Beispiel für eine abstrakte Gruppe, die keine maximalen Untergruppen besitzt.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.4

Seien $H \leq \text{Sym}(\Omega)$ und $K \leq \text{Sym}(\Delta)$ Permutationsgruppen. Sei $\Sigma = \Omega \times \Delta$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $h \in H$ und $\delta \in \Delta$ ist

$$h(\delta): \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad \begin{cases} (\omega, \delta) \mapsto (\omega^h, \delta), \\ (\omega, \tilde{\delta}) \mapsto (\omega, \tilde{\delta}) \end{cases} \quad \text{for } \tilde{\delta} \neq \delta$$

eine Permutation von Σ .

(b) Zeigen Sie: Für jedes $k \in K$ ist

$$k^*: \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad (\omega, \delta) \mapsto (\omega, \delta^k)$$

eine Permutation von Σ .

(c) Das *Kranzprodukt* $G = H \wr K$ ist diejenige Untergruppe von $\text{Sym}(\Sigma)$, die von den Elementen $h(\delta)$ und k^* , mit $h \in H$, $\delta \in \Delta$ und $k \in K$, erzeugt wird.

Zeigen Sie: $B = \langle h(\delta) \mid h \in H, \delta \in \Delta \rangle \trianglelefteq G$, und $B = \text{Dr}_{\delta \in \Delta} H(\delta)$ ist das direkte Produkt der Untergruppen $H(\delta) = \{h(\delta) \mid h \in H\} \cong H$, $\delta \in \Delta$. Weiter gilt $G = T \rtimes B$, wobei $T = \{k^* \mid k \in K\} \cong K$ ist und T auf B , der Operation von K auf Δ entsprechend, über „Koordinatenpermutationen“ wirkt.

Insbesondere gilt für Kranzprodukte endlicher Permutationsgruppen: $|G| = |K| |H|^{\Delta}$.

(d) Zeigen Sie: $D_8 \cong C_2 \wr C_2$ (als abstrakte Gruppen), wobei $C_2 \cong \text{Sym}(2)$ als symmetrische Gruppe vom Grad 2 zu lesen ist.

(e) Sei p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$. Sei

$$W = ((\dots(C_p \wr C_p) \wr \dots \wr C_p) \wr C_p)$$

das m -fach iterierte Kranzprodukt von $C_p = \langle (12 \dots p) \rangle \leq \text{Sym}(p)$.

Zeigen Sie: W ist als Permutationsgruppe isomorph zu einer p -Sylowuntergruppe der symmetrischen Gruppe $\text{Sym}(p^m)$.

(f) Zeigen Sie: $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z} \leq \text{Sym}(\mathbb{Z})$ per Rechtsaddition auf sich selbst operiere, ist eine endlich erzeugte, auflösbare Gruppe; jedoch besitzt $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ Untergruppen, die nicht mehr endlich erzeugt sind.