

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 8

Abgabe der Lösungen bis 12.06.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 8.1 und 8.5 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 8.1

(4 Punkte)

Sei $n = \prod_p p^{n(p)}$ eine Steinitzzahl.

(a) Zeigen Sie: Die pro-endliche Gruppe $\widehat{\mathbb{Z}}$ besitzt genau eine Untergruppe $H \leq_{\text{abg}} \widehat{\mathbb{Z}}$ mit Index $|\widehat{\mathbb{Z}} : H| = n$; weiter ist $H \cong \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ für $P = \{p \in \mathbb{P} \mid n(p) < \infty\}$.

(b) Zeigen Sie: Bis auf Isomorphie gibt es genau eine pro-zyklische Gruppe G mit $|G| = n$.

Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall, daß $n = p^\nu$, mit $\nu \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, eine Primzahlpotenz ist.

Aufgabe 8.2

(a) Sei $\varphi: G \rightarrow \tilde{G}$ ein stetiger Homomorphismus zwischen pro-endlichen Gruppen, und sei $\pi \subseteq \mathbb{P}$ eine Menge von Primzahlen.

Zeigen Sie: Ist $H \leq_{\text{abg}} G$ eine pro- π -Halluntergruppe, so ist $H\varphi \leq_{\text{abg}} G\varphi$ ebenfalls eine pro- π -Halluntergruppe.

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine endliche Gruppe G und eine Primzahlmenge $\pi \subseteq \mathbb{P}$ dergestalt, daß G keine π -Halluntergruppe besitzt.

Aufgabe 8.3

Seien G, H pro-endliche Gruppen. Zeigen Sie: Für die Frattiniuntergruppen gilt

$$\Phi(G \times H) = \Phi(G) \times \Phi(H).$$

Bemerkung: Für abstrakte Gruppen gilt die Formel im allgemeinen *nicht*. Woran könnte das liegen?

Aufgabe 8.4

Sei G eine pro-endliche Gruppe. Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne $\gamma_i G$ das i -te Glied der (abstrakten) absteigenden Zentralreihe von G und $\overline{\gamma_i G}$ dessen topologischen Abschluß.

(a) Zeigen Sie: G ist pronilpotent, d. h. isomorph zu einem inversen Limes von endlichen nilpotenten Gruppen, genau dann, wenn $\bigcap \{\overline{\gamma_i G} \mid i \in \mathbb{N}\} = 1$ gilt.

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine pronilpotente Gruppe G mit trivialem Zentrum $Z(G) = 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.5

(4 Punkte)

Bekanntlich sind für eine endliche Gruppe G folgende Aussagen paarweise äquivalent:

- (i) G ist nilpotent, d. h., es gilt $\gamma_{c+1}G = 1$ für hinreichend große $c \in \mathbb{N}$.
- (ii) Für jede Primzahl p besitzt G genau eine p -Sylowuntergruppe S_p , und diese ist ein Normalteiler $S_p \trianglelefteq G$.
- (iii) $G = \prod_p S_p$ ist das direkte Produkt von p -Sylowuntergruppen S_p , wobei p die Primteiler von $|G|$ durchläuft.
- (iv) Für jede echte Untergruppe $H \subsetneq G$ ist $H \subsetneq N_G(H)$.

(Beweisen Sie diesen Sachverhalt ggf. noch einmal für sich selbst oder schauen Sie ggf. in der Literatur nach.)

Zeigen Sie nun: Für eine pro-endliche Gruppe G sind paarweise äquivalent:

- (I) G ist pronilpotent.
- (II) Für jede Primzahl p besitzt G genau eine pro- p -Sylowuntergruppe S_p , und diese ist ein Normalteiler $S_p \trianglelefteq_{\text{abg}} G$.
- (III) $G = \prod_p S_p$ ist isomorph zu dem cartesischen Produkt seiner pro- p -Sylowuntergruppen S_p , wobei p die Primteiler von $|G|$ durchläuft.
- (IV) Für jede echte offene Untergruppe $H \subsetneq_{\text{off}} G$ ist $H \subsetneq N_G(H)$.

Zusätzliche Aufgabe 8.6

Sei p eine Primzahl mit $p > 2$. Betrachten Sie die pro-endliche Gruppe $G = \langle s \rangle \ltimes A$, wobei die Operation von $\langle s \rangle \cong C_2$ auf $A \cong \mathbb{Z}_p$ wie folgt gegeben sei: $a^s = a^{-1}$ für alle $a \in A$.

- (a) Zeigen Sie: G läßt sich als inverser Limes von endlichen Diedergruppen darstellen.
- (b) Bestimmen Sie zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der offenen Untergruppen $H \leq_{\text{off}} G$ mit $|G : H| = n$.
- (c) Verifizieren Sie: G besitzt keine offene pro-zyklische Untergruppe, die zentral in G ist.

Bemerkung: Das Beispiel ist relevant in Bezug auf den folgenden, ungleich schwieriger zu beweisenden Satz: Besitzt eine pro- p Gruppe G für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens p^n offene Untergruppen vom Index p^n , so gibt es in G bereits eine offene pro-zyklische Untergruppe, die zentral in G ist.