

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 7

Abgabe der Lösungen bis 05.06.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 7.2 und 7.5 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 7.1

Sei p eine Primzahl und sei $K = \mathbb{F}_p$ ein Körper der Kardinalität p . Sei $\ell \neq p$ eine weitere Primzahl, und betrachte im algebraischen Abschluß $\overline{K}$ die Kette $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ von endlichen Körpern, wobei $K_i = \{a \in \overline{K} \mid a^{p^{\ell^i}} - a = 0\}$ den eindeutigen Erweiterungskörper von K vom Grad $[K_i : K] = \ell^i$ bezeichnet.

Sei $L = \bigcup \{K_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ und $G = \text{Aut}(L)$ die Automorphismengruppe des Körpers L . Schließlich sei $\varphi: L \rightarrow L$, $x \mapsto x^p$ der Frobeniusautomorphismus.

(a) Zeigen Sie: $L|K$ ist eine normale und separable algebraische Körpererweiterung, d. h., zu jedem Element $a \in L$ gibt es ein separables Polynom $f \in K[X]$ mit $f(a) = 0$, das zudem über L vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Bemerkung: Man sagt, $L|K$ sei eine (unendliche) *Galoissche Körpererweiterung*.

(b) Bestimmen Sie $\{a \in L \mid a^\varphi = a\}$, und zeigen Sie: $G = \{\alpha \in \text{Aut}(L) \mid \alpha|_K = \text{id}_K\}$.

Bemerkung: Man nennt G die *Galoisgruppe* zu der Galoisschen Erweiterung $L|K$.

(c) Konstruieren Sie einen Automorphismus $\psi \in G$ mit der Eigenschaft: $\psi|_{K_i} = \varphi^{m_i}$ mit $m_i = 1 + \ell + \ell^2 + \dots + \ell^{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(d) Folgern Sie: $H = \langle \varphi \rangle$ ist eine echte Untergruppe von G ; dennoch stimmen die zugehörigen Fixkörper $\{a \in L \mid \forall h \in H : a^h = a\}$ und $\{a \in L \mid \forall g \in G : a^g = a\}$ überein.

Bemerkung: Die Galoiskorrespondenz zwischen den Untergruppen der Galoisgruppe G und den Zwischenkörpern der Galoisschen Erweiterung $L|K$ ist also scheinbar gestört. Indem man auf G eine geeignete Topologie erklärt, läßt sich die Korrespondenz reparieren: G wird in natürlicher Weise eine pro-endliche Gruppe und es besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen den *abgeschlossenen* Untergruppen von G und den Zwischenkörpern von $L|K$. Frage: Welche pro-endliche Gruppe erhält man wohl?

Aufgabe 7.2

(4 Punkte)

Sei $q = p^f$ eine Primzahlpotenz, und sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper der Kardinalität q mit algebraischem Abschluß $\overline{\mathbb{F}_q}$.

Zeigen Sie: Es gibt eine natürliche Bijektion $n \mapsto \mathbb{F}(n)$ zwischen der Menge der Steinitzzahlen und der Menge aller Zwischenkörper der Erweiterung $\overline{\mathbb{F}_q}|\mathbb{F}_q$, mit der gilt:

$$\mathbb{F}(m) \subseteq \mathbb{F}(n) \quad \longleftrightarrow \quad m \mid n \quad \text{für alle Steinitzzahlen } m, n.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Beschreibung *endlicher* Körpererweiterungen von $\mathbb{F}_q$: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es, innerhalb von $\overline{\mathbb{F}_q}$, genau einen Erweiterungskörper vom Grad m über $\mathbb{F}_q$; dieser Körper $\mathbb{F}_{q^m}$ ist der Zerfällungskörper des Polynoms $X^{q^m} - X \in \mathbb{F}_q[X]$ und $\mathbb{F}_{q^m} \setminus \{0\}$ besteht gerade aus den $(q^m - 1)$ ten Einheitswurzeln.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{SL}_n(\widehat{\mathbb{Z}}) \cong \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

(b) Sei $p \in \mathbb{P}$. Liegt $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dicht in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$? Gilt $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) \cong \widehat{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})}_p$?
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 7.4

(a) Sei $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$ der inverse Limes eines inversen Systems $(G_i, \varphi_{ij})_I$ von pro-endlichen Gruppen mit surjektiven Verbindungshomomorphismen $\varphi_{ij}: G_i \rightarrow G_j$ für $i, j \in I$ mit $i \geq j$.
Zeigen Sie: $|G| = \mathrm{kgV}(|G_i|)_{i \in I}$.

(b) Folgern Sie: Insbesondere gilt für jede Familie G_i , $i \in I$, von pro-endlichen Gruppen:

$$\left| \prod_{i \in I} G_i \right| = \prod_{i \in I} |G_i|.$$

Aufgabe 7.5

(4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $p \in \mathbb{P}$.

(a) Bestimmen Sie $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)|$.

(b) Zeigen Sie für $p > 2$: $\mathbb{Z}_p$ enthält eine primitive $(p-1)$ te Einheitswurzel ζ , und es gilt

$$\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^\times = \langle \zeta \rangle \times \overline{\langle 1+p \rangle},$$

wobei $\langle \zeta \rangle \cong C_{p-1}$ und $\overline{\langle 1+p \rangle} \cong \mathbb{Z}_p$ sind.

(c) Bestimmen Sie explizit eine pro- p -Sylowuntergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

(d) Zeigen Sie: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ besitzt nur endlich viele pro- p -Sylowuntergruppen, aber für $n \geq 2$ zu jeder Primzahl ℓ mit $\ell \mid (p-1)$ überabzählbar unendlich viele pro- ℓ -Sylowuntergruppen.