

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 5

Abgabe der Lösungen bis 22.05.2021 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 5.2 und 5.3 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 5.1

Bzgl. der pro-endlichen Topologie sind die offenen Teilmengen von $\mathbb{Z}$ gerade die Vereinigungen von Nebenklassen der Form $a + b\mathbb{Z}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$. Insbesondere ist in dieser Topologie jede nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{Z}$ unendlich. Folgern Sie aus der Gleichung $\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ prim}\}$, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Definition. Sei G eine pro-endliche Gruppe, und sei $H \leq_{\text{abg}} G$. Wir betrachten G/H als topologischen Raum bzgl. der Quotiententopologie, und $\pi: G \rightarrow G/H$ bezeichne die kanonische Projektion. Ein *Links-Repräsentantensystem* für H in G ist eine abgeschlossene Teilmenge $S \subseteq_{\text{abg}} G$, die aus jeder Links-Nebenklasse gH , $g \in G$, genau ein Element enthält. Eine *Links-Repräsentantenabbildung* für H in G ist eine stetige Abbildung $\sigma: G/H \rightarrow G$ mit der Eigenschaft $\sigma\pi = \text{id}_{G/H}$. (Die zusätzlichen topologischen Eigenschaften werden also stillschweigend in die entsprechenden Begriffe aus der Gruppentheorie integriert.) Analog definiert man *Rechts-Repräsentantensysteme* und *-abbildungen*. Sind $L \leq_{\text{abg}} H \leq_{\text{abg}} G$ abgeschlossene Untergruppen, so bezeichnen wir die kanonische Projektion $G/L \rightarrow G/H$ mit $\pi_{L,H}$. Eine stetige Abbildung $\tau: G/H \rightarrow G/L$ mit $\tau\pi_{L,H} = \text{id}_{G/H}$ nennen wir *relative Repräsentantenabbildung*.

Aufgabe 5.2

(4 Punkte)

Sei G eine pro-endliche Gruppe, und sei $H \leq_{\text{abg}} G$. Zeigen Sie:

- (a) Ist S ein Links-Repräsentantensystem für H in G , so ist $S \rightarrow G/H$, $x \mapsto xH$ ein Homöomorphismus.
- (b) Links-Repräsentantensysteme S für H in G stehen in natürlicher Weise in Bijektion zu Links-Repräsentantenabbildungen $\sigma: G/H \rightarrow G$. Dabei entsprechen die Repräsentantensysteme S mit $1 \in S$ den Repräsentantenabbildungen σ mit $H\sigma = 1$.
- (c) Ist $\sigma: G/H \rightarrow G$ eine Links-Repräsentantenabbildung, so liefert

$$G \rightarrow G/H \times H, \quad g \mapsto (gH, ((gH)\sigma)^{-1}g)$$

einen Homöomorphismus.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.3

(4 Punkte)

Sei G eine pro-endliche Gruppe und $H \leq_{\text{abg}} G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeigen Sie anhand der folgenden drei Teilaufgaben, daß eine Links-Repräsentantenabbildung $\sigma: G/H \rightarrow G$ existiert.

(a) Sei $L \leq_{\text{abg}} H$ und sei $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$. Zeigen Sie: Falls eine relative Repräsentantenabbildung $\tau_0: N/(N \cap H) \rightarrow N/(N \cap L)$ existiert, dann gibt es auch eine relative Repräsentantenabbildung $\tau: G/H \rightarrow G/L$.

(b) Sei $L \leq_{\text{off}} H$ nun eine offene Untergruppe von H . Verwenden Sie (a), um die Existenz einer relativen Repräsentantenabbildung $\tau: G/H \rightarrow G/L$ zu zeigen.

(c) Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Paare (L, τ) wobei $L \leq_{\text{abg}} H$ eine abgeschlossene Untergruppe und $\tau: G/H \rightarrow G/L$ eine relative Repräsentantenabbildung ist. Wir definieren eine Ordnung auf $\mathcal{R}$ durch

$$(L, \tau) \leq (M, \sigma) \leftrightarrow_{\text{def}} M \subseteq L \text{ und } \sigma \pi_{M,L} = \tau.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{R}$ besitzt maximale Elemente bzgl. “ $\leq$ ”. Erklären Sie: für maximale Elemente $(L, \tau) \in \mathcal{R}$ gilt stets $L = \{1\}$ und $\tau: G/H \rightarrow G$ ist eine Links-Repräsentantenabbildung.

Aufgabe 5.4

Welche der folgenden topologischen Gruppen sind (a) kompakt, (b) pro-endlich, (c) pro-auflösbar, (d) pro-nilpotent, (e) pro-abelsch, (f) pro-zyklisch? Welche sind (g) pro- p -Gruppen für eine geeignete Primzahl p ? (Begründen Sie Ihre Antworten!)

$$\begin{array}{lll} \text{GL}_3(\mathbb{R}), & \text{Alt}(17), & \{A \in \text{GL}_5(\mathbb{F}_3[[t]]) \mid A \equiv_t \text{Id}\}, \\ \prod_{p \in \mathbb{P}} \text{PSL}(2, p), & \prod_{n \geq 3} D_{2n}, & \mu_{7^\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k : z^{7^k} = 1\}, \\ \text{SO}_2(\mathbb{R}), & \prod_{p \in \mathbb{P}} C_p, & \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/5^k \mathbb{Z} \quad (\mathbb{N} \text{ mittels } \leq \text{ gerichtet}), \end{array}$$

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \{(a_{i,j}) \in \text{GL}_n(\mathbb{F}_9) \mid a_{i,j} = 0 \text{ für } i > j\} \quad (\mathbb{N} \text{ mittels } \leq \text{ gerichtet}),$$

wobei die Verbindungshomomorphismen eine Matrix A jeweils auf ihren oberen linken Teilblock der gewünschten Größe abbilden,

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (n\mathbb{Z} \times 2n\mathbb{Z} \times 3n\mathbb{Z}) \quad (\mathbb{N} \text{ mittels } m \leq n \leftrightarrow_{\text{def}} m \mid n \text{ gerichtet})$$

mit den offensichtlichen Verbindungshomomorphismen, sowie

$$\{(a_{i,j}) \in \text{Mat}_2(\mathbb{F}_{121}[[t]]) \mid a_{1,1} = 1, a_{2,1} = 0, a_{2,2} \equiv_t 1\}.$$