

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis 15.05.2021 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 4.1 und 4.3 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Seien $\mathcal{X} = (X_i, \varphi_{ij})_I$ und $\mathcal{Y} = (Y_i, \psi_{ij})_I$ inverse Systeme von topologischen Räumen (bzw. topologischen Gruppen) über einer gerichteten geordneten Menge I mit inversen Limites $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$ und $Y = \varprojlim_{i \in I} Y_i$.

Formulieren Sie genauer und beweisen Sie: Dann ist $X \times Y = \varprojlim_{i \in I} X_i \times Y_i$.

Aufgabe 4.2

Sei $\mathcal{X} = (X_i, \varphi_{ij})_I$ ein inverses System von nicht-leeren Mengen über einer gerichteten geordneten Menge I . Zeigen Sie: Ist I abzählbar und ist für $i, j \in I$ mit $i \geq j$ stets $\varphi_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ surjektiv, so ist $X = \varprojlim_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Bemerkung: Auf die Voraussetzung, daß I abzählbar ist, kann im allgemeinen nicht verzichtet werden. Ein leicht zugängliches Beispiel dazu stammt von W.C. Waterhouse.¹

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Sei $I = (I, \leq)$ eine gerichtete geordnete Menge, und sei $\mathcal{X} = (X_i, \varphi_{ij})_I$ ein inverses System von topologischen Räumen (bzw. topologischen Gruppen). Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt *konfinal*, sofern es zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $i \leq j$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Ist

$$X = \varprojlim_{i \in I} X_i \quad \text{bzgl.} \quad \varphi_i: X \rightarrow X_i, \quad i \in I,$$

und ist $J \subseteq I$ mittels der induzierten Ordnung $\leq|_{J \times J}$ gerichtet sowie

$$\tilde{X} = \varprojlim_{j \in J} X_j \quad \text{bzgl.} \quad \tilde{\varphi}_j: \tilde{X} \rightarrow X_j, \quad j \in J,$$

so gibt es genau eine stetige Abbildung (bzw. genau einen stetigen Homomorphismus) $\vartheta: X \rightarrow \tilde{X}$ mit der Eigenschaft: $\vartheta \tilde{\varphi}_j = \varphi_j$ für alle $j \in J$.

(b) Ist $J \subseteq I$ konfinal, so ist J jedenfalls mittels der induzierten Ordnung $\leq|_{J \times J}$ gerichtet.

(c) Ist I abzählbar unendlich, so gibt es eine konfinale Teilmenge $J \subseteq I$ dergestalt, daß die geordnete Menge $J = (J, \leq|_{J \times J})$ isomorph zu $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \leq)$ oder zu $(\{1\}, \leq)$ ist.

(d) Ist $J \subseteq I$ konfinal, so ist $\varprojlim_{i \in I} X_i \cong \varprojlim_{j \in J} X_j$. Genauer vermittelt die in (a) konstruierte Abbildung einen natürlichen Isomorphismus.

Bemerkung: Insbesondere ist also jeder inverse Limes von abzählbar vielen endlichen Gruppen als topologische Gruppe bereits isomorph zu einem inversen Limes von endlichen Gruppen, die durch $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \leq)$ indiziert sind.

Bitte wenden!

¹Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 618

Aufgabe 4.4

Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und $G = \prod_{p \in \mathbb{P}} G_p$ das cartesische Produkt von alternierenden Gruppen $G_p \cong \text{Alt}(p)$ vom Grad p . Zeigen Sie: Es gibt eine von 2 Elementen erzeugte dichte Untergruppe Γ von G .

Hinweis: Verwenden Sie, daß sich jede alternierende Gruppe $\text{Alt}(p)$ mit $p \geq 3$ von einem 3-Zykel (z.B. $(1\ 2\ 3)$) und einem p -Zykel (z.B. $(1\ 2\ 3\ \dots\ p)$) erzeugen läßt. Benutzen Sie ferner, daß $\text{Alt}(p)$ eine einfache Gruppe ist.

Aufgabe 4.5

Es bezeichne $\mathbb{F}_q$ einen endlichen Körper mit q Elementen; ausgestattet mit der diskreten Topologie ist $\mathbb{F}_q$ ein topologischer Ring. Erläutern bzw. zeigen Sie:

- (a) Der Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{F}_q[[t]]$ über $\mathbb{F}_q$ ist bzgl. der Produkttopologie ein total unzusammenhängender, kompakter topologischer Ring.
- (b) Der Polynomring $\mathbb{F}_q[t]$ ist ein dichter Unterring von $\mathbb{F}_q[[t]]$.
- (c) Es gilt

$$\mathbb{F}_q[[t]] \cong \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_q[[t]]/t^i \mathbb{F}_q[[t]] \cong \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_q[t]/t^i \mathbb{F}_q[t],$$

wobei die endlichen Faktorringe $R_i = \mathbb{F}_q[t]/t^i \mathbb{F}_q[t]$ mit der diskreten Topologie ausgestattet und durch die kanonischen Projektionen $\varphi_{ij}: R_i \rightarrow R_j$, für $i \geq j$, verbunden sind.

- (d) Für die verbleibenden Aufgabenteile sei zusätzlich $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\text{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \mid \det(A) \in \mathbb{F}_q[[t]]^\times\}$$

eine total unzusammenhängende, kompakte topologische Gruppe.

Hierbei erhält $\text{Mat}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \cong \mathbb{F}_q[[t]]^{n^2}$ die Produkttopologie und $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]])$ die entsprechende Unterraumtopologie; die Einheitengruppe von $\mathbb{F}_q[[t]]$ erfüllt

$$\mathbb{F}_q[[t]]^\times = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j \mid f_0 \in \mathbb{F}_q^\times \text{ und } f_j \in \mathbb{F}_q \text{ für } j \geq 1 \right\}.$$

- (e) Weiter gilt

$$\text{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \cong \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \text{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]]/t^i \mathbb{F}_q[[t]]) \cong \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \text{GL}_n(\mathbb{F}_q[t]/t^i \mathbb{F}_q[t]),$$

wobei die endlichen Gruppen $G_i \cong \text{GL}_n(\mathbb{F}_q[t]/t^i \mathbb{F}_q[t])$ mit der diskreten Topologie ausgestattet und durch kanonische Projektionen miteinander verbunden sind.

- (f) Eine Umgebungsbasis K_i , $i \in \mathbb{N}$, für das neutrale Element Id in $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t]])$ bilden die sogenannten *Hauptkongruenzuntergruppen*

$$K_i = \text{GL}_n^i(\mathbb{F}_q[[t]]) = \text{Kern}(G \rightarrow G_i) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_q[[t]]) \mid A \equiv_{t^i} \text{Id}\} \trianglelefdeq_{\text{off}} G.$$

Schließlich gilt $G \cong \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G_i \cong \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G/K_i$.