

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis 08.05.2026 um 10.30 Uhr zu Beginn der Übung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 3.2 und 3.4 ab, und bereiten Sie die übrigen Aufgaben für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 3.1

Sei G_i , $i \in I$, eine Familie von topologischen Gruppen. Erläutern Sie: Dann ist das cartesische Produkt $G = \prod_{i \in I} G_i$ bezüglich der koordinatenweisen Multiplikation und der Produkttopologie eine topologische Gruppe.

Aufgabe 3.2

(4 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, und sei $G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ das cartesische Produkt von diskreten zyklischen Gruppen $G_i \cong C_p$ der Ordnung p .

Zeigen Sie: Die topologische Gruppe G (vergleiche Aufgabe 3.1) besitzt Untergruppen vom Index p , die in der Produkttopologie nicht abgeschlossen sind.

(b) Sei $G = \prod_{p \in \mathbb{P}} G_p$ das cartesische Produkt von diskreten zyklischen Gruppen $G_p \cong C_p$ der Ordnung p .

Zeigen Sie: Die abgeschlossenen Untergruppen von G sind genau die Untergruppen der Form

$$H_P = \{(x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in G \mid x_p = 1 \text{ für } p \notin P\} \cong \prod_{p \in P} G_p, \quad (P \subseteq \mathbb{P}).$$

Folgern Sie: Jede abgeschlossene Untergruppe von G besitzt eine dichte zyklische Untergruppe (d. h., wird topologisch von einem Element erzeugt).

Hinweis: Betrachten Sie zunächst spezieller offene Untergruppen von G .

Aufgabe 3.3

(a) Welche der folgenden Gruppen sind lokal-endlich? Warum?

- die symmetrische Gruppe $\text{Sym}(\mathbb{N})$,
- $\text{FSym}(\mathbb{N}) = \{\pi \in \text{Sym}(\mathbb{N}) \mid n\pi \neq n \text{ für nur endlich viele } n \in \mathbb{N}\} \leq \text{Sym}(\mathbb{N})$,
- $\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n$ bezüglich $+$ für $n \in \mathbb{N}$,
- $\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$ bezüglich $+$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vermutung: Eine abelsche Gruppe ist lokal-endlich genau dann, wenn sie periodisch ist (d. h. wenn jedes Element endliche Ordnung hat). – Wahr oder falsch?

(c) Vermutung: Eine auflösbare Gruppe ist lokal-endlich genau dann, wenn sie periodisch ist. – Wahr oder falsch?

(d) Kennen Sie (ggf. aus der Vorlesung „Einführung in die Gruppentheorie“) eine periodische Gruppe, die nicht lokal-endlich ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4

(4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = (A_i, \varphi_{ij})_I$ ein direktes System von *abelschen* Gruppen über einer gerichteten Menge $I = (I, \leq)$. Sei $S = \bigoplus_{i \in I} A_i$ mit kanonischen Homomorphismen $\iota_i: A_i \rightarrow S$, $i \in I$, die direkte Summe der Gruppen A_i . Sei $R \leq S$ diejenige Untergruppe, die von allen Elementen der Form

$$x\varphi_{ij}\iota_j - x\iota_i \quad \text{für } i, j \in I \text{ mit } i \leq j \text{ und } x \in A_i$$

erzeugt wird. Sei $A = S/R$, und für $i \in I$ sei $\varphi_i: A_i \rightarrow A$, $x \mapsto x\iota_i + R$.

- (a) Zeigen Sie: A , ausgestattet mit φ_i , $i \in I$, bildet einen direkten Limes von $\mathfrak{A}$.
- (b) Wieso funktioniert diese Konstruktion nicht allgemeiner für direkte Systeme von beliebigen (nicht notwendigerweise abelschen) Gruppen?

Aufgabe 3.5

Sei p eine Primzahl. Wir betrachten $\mathbb{Q}$, mit dem p -adischen Absolutbetrag $|\cdot|_p$ (welcher entsprechend einen p -adischen Abstandsbegriff nahelegt); vgl. Übungsblatt 1. Eine *Cauchyfolge* in $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen dergestalt, daß zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$|x_m - x_n|_p < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geq N.$$

Eine *Nullfolge* bzgl. $|\cdot|_p$ ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen dergestalt, daß die Folge $(|x_n|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen eine Nullfolge im euklidischen Sinne ist.

- (a) Zeigen Sie: Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine beliebige Ziffern-Folge in $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Dann bilden die Partialsummen $\sum_{i=0}^n a_i p^i$ eine Cauchyfolge bzgl. $|\cdot|_p$.
- (b) Erläutern Sie: Die Folge $(p^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Nullfolge bzgl. $|\cdot|_p$.
- (c) Zeigen Sie: Eine formale Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ mit rationalen Summanden x_i symbolisiert über ihre Partialsummen genau dann eine Cauchyfolge bzgl. $|\cdot|_p$, wenn $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge bzgl. $|\cdot|_p$ ist.
- (d) Erläutern Sie: Die Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$ bilden einen kommutativen Ring $\mathcal{R}$ mit Eins; Addition und Multiplikation sind hierbei koordinatenweise erklärt. Über die konstanten Folgen ist $\mathbb{Q}$ in natürlicher Weise als Unterring in diesen Ring $\mathcal{R}$ eingebettet. Die Nullfolgen bzgl. $|\cdot|_p$ bilden ein Ideal $\mathcal{N} \trianglelefteq \mathcal{R}$ und $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ ist ein Körper.

Hinweis: Wie kann man ein multiplikatives Inverses einer Folge modulo $\mathcal{N}$ konstruieren?

- (e) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}$ bettet sich in natürlicher Weise als Unterring in den Körper $\mathbb{Q}_p = \mathcal{R}/\mathcal{N}$ ein. Weiter läßt sich der Absolutbetrag $|\cdot|_p$ eindeutig zu einem Absolutbetrag $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}_p$ fortsetzen. Bezüglich der induzierten Topologie ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$.

Bemerkung: Der Körper $\mathbb{Q}_p$, ausgestattet mit $|\cdot|_p$, heißt der *Körper der p -adischen Zahlen*.

Literaturhinweis: Die Konstruktion der p -adischen Zahlen kann auch auf anderem Wege erfolgen. Vertiefend oder ergänzend können Sie z. B. die Ausführungen in

- (i) Leutbecher, Zahlentheorie, Springer-Verlag, 1996 (Kapitel 20)
- (ii) Neukirch, Die p -adischen Zahlen, Kaptitel 6 in: Ebbinghaus e. a., Zahlen, Springer-Verlag, 1992

studieren.