

Gruppentheorie II: Proendliche Gruppen – Blatt 2

Abgabe der Lösungen bis 30.04.2026 (Donnerstag) um 10.30 Uhr

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 2.1 und 2.2 ab, und bereiten Sie zusätzlich die Aufgaben 2.3 und 2.4 für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS26/

Aufgabe 2.1

(4 Punkte)

Sei G eine topologische Gruppe. Erläutern bzw. zeigen Sie:

(a) Jede Untergruppe $H \leq G$ ist selbst eine topologische Gruppe bezüglich der Unterraumtopologie.

(b) Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Dann ist die Faktorgruppe G/N eine topologische Gruppe bezüglich der Quotiententopologie, und der kanonische Homomorphismus $\pi: G \rightarrow G/N$ ist offen, d. h., für jedes $U \subseteq_{\text{off}} G$ ist $U\pi \subseteq_{\text{off}} G/N$.

Hinweis: Es bietet sich an, zunächst zu zeigen, daß $\pi: G \rightarrow G/N$ offen ist. Anschließend ist es hilfreich, sich zu überlegen, daß $(G \times G)/(N \times N) \cong G/N \times G/N$ gilt.

Aufgabe 2.2

(4 Punkte)

Sei G eine kompakte topologische Gruppe, und seien $m \in \mathbb{N}_0$ sowie $A_1, \dots, A_m \subseteq_{\text{abg}} G$. Dann ist für jedes Gruppenwort $w = w(x_1, \dots, x_m) \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle$, also jedes Element der freien Gruppe vom Rang m , die Wertemenge der zugehörigen Einsetzungsabbildung

$$w(A_1, \dots, A_m) = \{w(a_1, \dots, a_m) \mid a_i \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$$

abgeschlossen in G .

Aufgabe 2.3

Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ stets einen „Weg von x nach y “ gibt, d. h. eine stetige Abbildung $\omega: [0, 1] \rightarrow X$ von dem reellen Einheitsintervall nach X mit Anfangswert $0\omega = x$ und Endwert $1\omega = y$.

(a) Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

(b) Betrachten Sie den Raum

$$X = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x^{-1}, x \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

ausgestattet mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, daß X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2.4

(a) Zeigen Sie, daß $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\text{GL}_2(\mathbb{C})$, bzgl. der euklidischen Topologie, lokalkompakte topologische Gruppen sind.

(b) Zeigen Sie, daß $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist.

(c) Beweisen Sie, daß $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend ist.

(d) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat $\text{GL}_2(\mathbb{R})$?

Hinweis: Denken Sie an die Determinantenabbildung und an Normalformen für Matrizen; verwenden Sie Aufgabe 2.3 (a).