

Funktionenräume

Sommersemester 2022

Übungsblatt 9

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Mo., 06.06.2022, 14:00 Uhr
Besprechung: Mi., 15.06.2022 in der Übung

Aufgabe 9.1: (Ordnung und Träger von Distributionen)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Bestimmen Sie für die folgenden Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ jeweils die Ordnung und den Träger:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T\phi &:= \partial_{x_k}^m \phi(0), & \text{(b)} \quad T\phi &:= \int_{B_1(0)} |x|^2 \phi(x) \, dx, & \text{(c)} \quad T\phi &:= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \phi(x) \, dx, \\ \text{(d)} \quad T\phi &:= \sum_{j=0}^{\infty} \phi(je_k), & \text{(e)} \quad T\phi &:= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_k}^m \phi(x) \, dx, & \text{(f)} \quad T\phi &:= \sum_{j=0}^{\infty} (\partial_{x_k}^j \phi)(je_k). \end{aligned}$$

Aufgabe 9.2: (Reguläre Distributionen)

Sei $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, sei $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{F})$ und sei $g \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$. Zeigen Sie, dass $fT_g = T_{fg}$. Zeigen Sie weiter: Ist $A \subseteq \Omega$ abgeschlossen und $g = 0$ f. ü. in $\Omega \setminus A$, dann gilt $\text{spt } T_g \subseteq A$.