

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 9

Besprechung der Lösungen an den Montagen 12.01. und 19.01.2026

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 9.1

(a) Sei $\Gamma \leq \text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe. Zeigen Sie: Γ ist elementar genau dann, wenn alle Untergruppen $\langle \alpha, \beta \rangle$, die sich von zwei Elementen $\alpha, \beta \in \Gamma$ erzeugen lassen, elementar sind.

Hinweis. Gehen Sie ähnlich vor, wie bei der Kennzeichnung der elementaren Fuchsschen Gruppen in der Vorlesung.

Bemerkung. Allgemeiner gilt sogar für jede Gruppe $G \leq \text{Möb}(\mathbb{H})$: Die Gruppe G ist elementar genau dann, wenn all ihre Untergruppen, die sich von zwei Elementen erzeugen lassen, elementar sind.¹

(b) Geben Sie eine Gruppe $G \leq \text{Homö}(\mathbb{R})$ von Homöomorphismen der reellen Geraden an, so daß alle G -Bahnen in $\mathbb{R}$ unendlich sind, obschon jede endlich erzeugte Untergruppe H von G unendliche viele Fixpunkte in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 9.2

Sei $G \leq \text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine nicht-elementare Gruppe. Zeigen Sie: G enthält wenigstens ein hyperbolisches Element.

Hinweis. Folgern Sie, daß G wenigstens ein parabolisches Element g sowie ein Element h mit $\text{Fix}_{\mathbb{H}}(g) \not\subseteq \text{Fix}_{\mathbb{H}}(h)$ enthält. Betrachten Sie sodann $h_n = g^{o_n} \circ h \in G$, für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, um eine geeignete Schlußfolgerung bezüglich h zu ziehen.

Bemerkung. In der Vorlesung werden wir die Existenzaussage wie folgt verschärfen: Jede nicht-elementare Gruppe $G \leq \text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ enthält eine unendliche Folge von hyperbolischen Elementen, deren Fixpunktmenge paarweise disjunkt sind.

¹Siehe z. B. Lemma 5.5 in: J. Gilman, *Inequalities in discrete subgroups of $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$* , Can. J. Math. 40 (1988), 115–130.