

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 8

Besprechung der Lösungen an den Montagen 05.01. und 12.01.2026

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 8.1

Sei $\Gamma \leq \text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2$ eine Fuchssche Gruppe, mit Limesmenge

$$L(\Gamma) = \bigcup \{ \{w \in \overline{\mathbb{H}} \mid w \text{ ein Häufungspunkt von } \Gamma.z\} \mid z \in \mathbb{H} \} \subseteq \partial\mathbb{H}.$$

Verifizieren Sie die folgenden beiden Aussagen aus der Vorlesung.

- (i) Für parabolische und hyperbolische Elemente $\gamma \in \Gamma$ gilt stets: $\text{Fix}_{\overline{\mathbb{H}}}(\gamma) \subseteq L(\Gamma)$.
- (ii) Ist $\Gamma = \langle \tau_T, \tau_S \rangle \cong \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ für $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$.

Bemerkung. Also liefert $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ eine Fuchssche Gruppe der ersten Art.

Aufgabe 8.2

(a) Verifizieren Sie: Zwei nicht-triviale Elemente $\sigma, \tau \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \{1\}$ kommutieren miteinander genau dann, wenn sie dieselbe Fixpunktmenge haben, d. h.,

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \text{Fix}_{\overline{\mathbb{H}}}(\sigma) = \text{Fix}_{\overline{\mathbb{H}}}(\tau).$$

(b) Folgern Sie: Für den Zentralisator von $\tau \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \{1\}$ gilt

$$C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\tau) \cong \begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \text{falls } \tau \text{ parabolisch oder hyperbolisch ist,} \\ (\{u \mid u \in \mathbb{C} \text{ mit } |u| = 1\}, \cdot) & \text{falls } \tau \text{ elliptisch ist.} \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie weiter, daß für eine Fuchssche Gruppe paarweise äquivalent sind:

- (i) Γ ist abelsch.
- (ii) Alle Elemente von $\Gamma \setminus \{1\}$ haben dieselbe Fixpunktmenge in $\overline{\mathbb{H}}$.
- (iii) Γ ist zyklisch.