

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 7

Besprechung der Lösungen an den Montagen 15.12.2025 und 05.01.2026

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 7.1

(a) Bestimmen Sie für die natürliche Wirkung $\text{Möb}(\mathbb{H}) \curvearrowright \overline{\mathbb{H}}$ die Isotropiegruppen

$$\{\sigma \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \mid \sigma(\infty) = \infty\} \quad \text{und} \quad \{\varrho \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \mid \varrho(i) = i\}.$$

Bemerkung. Bis auf Konjugation sind das bereits alle möglichen Isotropiegruppen.

(b) Zeigen Sie: Jedes $\tau \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ läßt sich eindeutig als Produkt $\tau = \sigma\varrho$ mit $\sigma, \varrho \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ schreiben dergestalt, daß $\sigma(\infty) = \infty$ und $\varrho(i) = i$ gelten.

(c) Folgern Sie: Als topologischer Raum ist $\text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$.

(d) Zeigen Sie: Jede Fuchssche Gruppe ist abzählbar.

Aufgabe 7.2

Betrachten Sie den punktierten Quadranten $Q = (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ausgestattet mit der euklidischen Topologie, und sei $G = \langle g \rangle$ eine unendliche zyklische Gruppe.

(a) Verifizieren Sie: G wirkt gemäß

$$g^m \cdot (a, b) = \left(2^m a, \frac{1}{2^m} b\right) \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \text{ und } (a, b) \in Q$$

mittels Homöomorphismen auf Q . Wird G mit der diskreten Topologie versehen, erhalten wir also eine stetige Wirkung.

(b) Prüfen Sie: Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf Q , deren Äquivalenzklassen zweielementig von der Form $\{(a, 0), (0, a^{-1})\}$ mit $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und ansonsten einelementig sind, ist verträglich mit der oben beschriebenen Wirkung von G . Somit wirkt G auf dem Quotientenraum $X = Q/\sim$, und weiter ist X homöomorph zu einem Möbiusband (ohne Rand).

(c) Zeigen Sie, für die wie oben beschrieben konstruierte Wirkung $G \curvearrowright X$:

Für jedes $x \in X$ ist $\text{Stab}_G(x) = \{1\}$ trivial und die Bahn $G.x$ besitzt keinen Häufungspunkt in X . Dennoch gibt es Punkte $x \in X$ dergestalt, daß für $x \in U \subseteq_{\text{off}} X$ die Menge $T_G(U, U) = \{h \in G \mid h.U \cap U \neq \emptyset\}$ stets unendlich ausfällt.

Bemerkung. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß ein solches Phänomen für metrische Räume und Wirkungen mittels Isometrien nicht auftreten kann.