

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 6

Besprechung der Lösungen an den Montagen 08.12.2025 und 15.12.2025

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 6.1

Sei G eine topologische Gruppe.

- (a) Erläutern Sie: Für jede offene Umgebung $U \subseteq G$ von 1 existiert eine offene Umgebung $V \subseteq G$ von 1 mit $V^{-1}V = \{x^{-1}y \mid x, y \in V\} \subseteq U$.
- (b) Folgern Sie: G ist hausdorffsch genau dann, wenn $\{1\} \subseteq_{\text{abg}} G$ gilt.
- (c) Verifizieren Sie: Der topologische Abschluß einer Untergruppe in G ist stets erneut eine Untergruppe, d. h., $H \leq G$ impliziert $\overline{H} \leq G$.
- (d) Zeigen Sie: Für jeden Normalteiler $N \trianglelefteq G$ ist G/N bzgl. der Quotiententopologie eine topologische Gruppe; weiter ist der kanonische Homomorphismus $\pi: G \rightarrow G/N$ offen, d. h., für $U \subseteq_{\text{off}} G$ ist auch $\pi(U) \subseteq_{\text{off}} G/N$.

Hinweis. Überprüfen Sie als erstes, daß die Abbildung $\pi: G \rightarrow G/N$ offen ist.

Aufgabe 6.2

Verifizieren Sie: Die topologische Gruppe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist hausdorffsch, lokalkompakt, wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Hinweis. Für die letzte Aussage können Sie zum Beispiel folgenden Ansatz verfolgen. Die topologische Gruppe $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \text{Möb}(\mathbb{H})$ wirkt auf $\partial\mathbb{H} \cong S^1$, und wir erhalten eine stetige Abbildung $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow S^1$, indem wir die Bildpunkte eines fest gewählten Referenzpunktes verfolgen. Verwenden Sie nun geeignet die Untergruppe von $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, deren Elemente durch euklidische Drehmatrizen repräsentiert werden.

Aufgabe 6.3

- (a) Seien $\tau_A, \tau_B \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ parabolisch bzw. hyperbolisch und mit einem gemeinsamen Fixpunkt in $\overline{\mathbb{H}}$. Zeigen Sie: Die Gruppe $\Gamma = \langle \tau_A, \tau_B \rangle \leq \text{Möb}(\mathbb{R})$ ist nicht Fuchssch.
- (b) Erläutern Sie: Sind $\Delta \leq \Gamma \leq \text{Möb}(\mathbb{H})$ mit Δ Fuchssch und $|\Gamma : \Delta| < \infty$, so ist auch Γ Fuchssch.