

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 5

Besprechung der Lösungen an den Montagen 01.12.2025 und 08.12.2025

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Wir erinnern an folgende Sprechweisen aus der Topologie. Ein topologischer Raum X erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare offene Umgebungsbasis besitzt, d. h., es existiert eine abzählbare absteigende Kette $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ von offenen Umgebungen von x in X dergestalt, daß es zu jeder offenen Umgebung V von x in X stets ein hinreichend großes $i \in \mathbb{N}$ mit $U_i \subseteq V$ gibt.

Der Raum X erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls X eine abzählbare Basis (für seine offenen Mengen) besitzt.

Aufgabe 5.1

Erläutern Sie: Jeder metrische Raum X ist bzgl. der induzierten Topologie hausdorffsch und genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 5.2

Die *Sorgenfrey-Gerade* ist der topologische Raum X mit Trägermenge $\mathbb{R}$, dessen Topologie durch die Basis $\mathfrak{B} = \{[a, b)_{\mathbb{R}} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ gegeben ist: Die offenen Teilmengen von X sind genau die Vereinigungen von halboffenen Intervallen aus $\mathfrak{B}$.

Zeigen Sie: X ist nicht diskret, aber total unzusammenhängend. Weiter genügt X dem ersten, aber nicht dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen dicht in X , und X ist nicht metrisierbar.

Bemerkung. Die Sorgenfrey-Topologie ist „feiner“ als die euklidische Topologie.

Aufgabe 5.3

Der topologische Raum X erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Zeigen Sie: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $x \in U$ konvergiert, stets alle bis auf endlich viele Folgenglieder bereits in U liegen.

Aufgabe 5.4

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir betrachten die beiden Aussagen: (i) f ist stetig. (ii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X und $x \in X$ mit $x_n \rightarrow x$ gilt: Die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $f(x)$ erfüllen $f(x_n) \rightarrow f(x)$ in Y .

Zeigen Sie: Stets folgt (ii) aus (i), und, falls X dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, so impliziert (ii) auch umgekehrt (i).

Aufgabe 5.5

Sei X ein kompakter topologischer Raum, und sei $A \subseteq X$ eine diskrete, abgeschlossene Teilmenge. Erläutern Sie: Dann ist A bereits endlich.