

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 4

Besprechung der Lösungen an den Montagen 24.11.2025 und 01.12.2025

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 4.1

Sei Δ ein nicht-ausgeartetes hyperbolisches Dreieck in der erweiterten hyperbolischen Ebene $\overline{\mathbb{H}}$. Zeigen Sie:

Jede erweiterte hyperbolische Gerade ℓ , die durch keinen der drei Eckpunkte von Δ verläuft, ist entweder (i) disjunkt zu $\overline{\Delta}$ oder (ii) schneidet $\overline{\Delta}$ in einem hyperbolischen Streckenabschnitt $[u, w]_{\mathbb{H}}$ von positiver Länge; im zweiten Fall bilden die beiden Endpunkte $u, w \in \mathbb{H}$ der Strecke genau den Schnitt von ℓ mit dem Dreiecksrand $\delta = \partial\overline{\Delta}$.

Hinweis. Die abgeschlossene Dreiecksfläche $\overline{\Delta}$ sei hierbei wie in (1.16) der Vorlesung als Durchschnitt der drei maßgeblichen abgeschlossenen Halbebenen definiert. Verwenden Sie darüber hinaus keine Eigenschaften von Δ , für deren Beweis wir in der Vorlesung die obige Aussage dann ggf. indirekt bereits verwendet haben.

Aufgabe 4.2

Sei $\ell \subseteq \mathbb{H}$ eine hyperbolische Gerade und $w \in \mathbb{H}$. Setze $d_{\mathbb{H}}(\ell, w) = \inf\{d_{\mathbb{H}}(u, w) \mid u \in \ell\}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Punkt $u \in \ell$, für den $d_{\mathbb{H}}(u, w) = d_{\mathbb{H}}(\ell, w)$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Ist $w \notin \ell$ und $u \in \ell$ mit $d_{\mathbb{H}}(u, w) = d_{\mathbb{H}}(\ell, w)$, so schneiden sich ℓ und die hyperbolische Gerade $\overline{u, w}^{\mathbb{H}}$ senkrecht.

(c) Beschreiben Sie speziell für $\ell = \overline{i, 2i}^{\mathbb{H}}$ explizit die Menge $\{\tilde{w} \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(\ell, \tilde{w}) = d_{\mathbb{H}}(\ell, w)\}$.

Hinweis. Es kann vorteilhaft sein, die Aufgabenteile (a), (b), (c) parallel zu lösen. Nutzen Sie insbesondere die Wirkung von Isometrien, um den allgemeinen Fall auf den Spezialfall $\ell = \overline{i, 2i}^{\mathbb{H}}$ zurückzuführen.

Aufgabe 4.3

Sei Σ ein nicht-ausgeartetes hyperbolisches n -Eck für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Leiten Sie aus der Gauß-Bonnet-Formel für hyperbolische Dreiecke und der Triangulierbarkeit von Σ die folgende Formel für den Flächeninhalt von Σ her:

$$\mu_{\mathbb{H}}(\Sigma) =_{\text{def}} \mu_{\mathbb{H}}(\overline{\Sigma}) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Innenwinkel an den Eckpunkten von Σ bezeichnen.

Aufgabe 4.4

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\alpha \in [0, \frac{n-2}{n}\pi)_{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie: Es existiert wenigstens ein reguläres hyperbolisches n -Eck Σ in der erweiterten hyperbolischen Ebene.

Hinweis. Betrachten Sie im Poincaréschen Kreisscheibenmodell $\mathbb{D}$ für $r \in (0, 1)_{\mathbb{R}}$ und $w = \exp(2\pi i/n)$ die regulären n -Ecke Σ_r mit den Eckpunkten $z_1 = r$, $z_2 = rw$, $z_3 = rw^2$, $\dots$, $z_n = rw^{n-1}$ und arbeiten Sie mit dem Flächeninhalt $\mu_{\mathbb{D}}(\Sigma_r)$.