

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 3

Besprechung der Lösungen an den Montagen 03.11.2025 und 10.11.2025

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 3.1

Erläutern Sie: Für $z, w, u \in \mathbb{H}$ gilt: $d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\mathbb{H}}(z, u) + d_{\mathbb{H}}(u, w)$ genau dann, wenn u auf der hyperbolischen Verbindungsstrecke von z nach w liegt, also $u \in [z, w]_{\mathbb{H}}$ gilt.

Aufgabe 3.2

Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ wirkt über Möbiustransformationen scharf 3-fach transitiv auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, und das Doppelverhältnis ist invariant unter dieser Wirkung.

Aufgabe 3.3

Zeigen Sie: Der hyperbolische Abstand zwischen $z, w \in \mathbb{H}$ erfüllt die Gleichung

$$\sinh\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}}(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}}.$$

Bemerkung. Die hyperbolische Sinusfunktion ist gegeben durch $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

Aufgabe 3.4

Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion und definiere die f -Länge eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ über das entsprechende Wegintegral:

$$\ell_f(\sigma) = \int_a^b f(\sigma(t)) |\sigma'(t)| dt.$$

Die f -Länge sei invariant unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ über Möbiustransformationen, d. h., es gelte $\ell_f(\gamma \circ \sigma) = \ell_f(\sigma)$ für alle $\gamma \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ und alle C^1 -Wege σ .

- (a) Zeigen Sie: Es gilt $f(\gamma(z)) |\gamma'(z)| = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$.
- (b) Folgern Sie: Für $z = x + yi \in \mathbb{H}$ hängt $f(z)$ nur von $\mathrm{Im}(z) = y$ ab.
- (c) Folgern Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ dergestalt, daß $f(y) = c/y$ für alle $y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Somit ist ℓ_f bis auf Skalierung schon die Längenfunktion $\ell_{\mathbb{H}}$, mit deren Hilfe wir den hyperbolischen Abstand eingeführt haben.