

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 2

Besprechung der Lösungen an den Montagen 27.10.2025 und 03.11.2025

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 2.1

Bestimmen Sie einen Homöomorphismus $\iota: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, der sich nicht stetig auf den Rand $\partial\mathbb{D}$ der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}$ fortsetzen läßt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2

Die hyperbolische Länge eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ ist gemäß Vorlesung durch ein Wegintegral über die (euklidische) Bogenlänge gegeben. Zeigen Sie in Bezug auf das Poincarésche Kreisscheibenmodell: Die entsprechende hyperbolische Länge eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ ist gleich

$$\ell_{\mathbb{D}}(\sigma) = 2 \int_a^b \frac{1}{1 - |\sigma(t)|^2} |\sigma'(t)| dt.$$

Aufgabe 2.3

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die *Länge* einer stetigen Kurve $\sigma: [a, b] \rightarrow X$ ist definiert als

$$\ell(\sigma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m d(\sigma(t_i), \sigma(t_{i-1})) \mid m \in \mathbb{N} \text{ und } t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R} \text{ mit } a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b \right\};$$

besitzt σ endliche Länge, so heißt σ *rektifizierbar*. Wir setzen weiter voraus: Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ gibt es stets eine rektifizierbare Kurve von x nach y .

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung $d^\circ: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Punktepaaar (x, y) das Infimum aller Längen rektifizierbarer Kurven von x nach y zuordnet, liefert eine Abstandsfunktion, so daß X auch bzgl. d° einen metrischen Raum bildet.

Bemerkung. Wir nennen d° die abgeleitete *Längenmetrik* und (X, d°) den aus (X, d) abgeleiteten *Längenraum*.

(b) Geben Sie einen metrischen Teilraum (X, d) der euklidischen Ebene an, für den die Metriken d und d° wesentlich verschieden sind. Geben Sie ebenfalls ein Beispiel für einen Längenraum (X, d°) , in dem es Punkte x, y gibt, die sich nicht durch eine stetige Kurve der Länge $d^\circ(x, y)$ verbinden lassen.

(c) Zeigen Sie: Stets gilt $(d^\circ)^\circ = d^\circ$.

(d) Verifizieren Sie: Die zu je zwei Punkten z, w der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ in der Vorlesung bestimmte minimierende C^1 -Geodätische von z nach w ist tatsächlich auch der eindeutige kürzeste Verbindungsweg unter allen rektifizierbaren stetigen Kurven von z nach w . Insbesondere ist $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ ein Längenraum.