

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Fuchssche Gruppen – Blatt 1

Besprechung der Lösungen an den Montagen 20.10.2025 und 27.10.2025

Informationen zur Vorlesung auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/FuchsscheGruppen_WS2526/.

Aufgabe 1.1

Sei $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^2, d)$ die euklidische Ebene, ausgestattet mit der euklidischen Abstandsfunktion

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{1/2} \quad \text{für } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Eine *platonische Pflasterung* von $\mathbb{E}$ ist eine Überdeckung $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{E}$, bestehend aus regelmäßigen n -Ecken $P_i \subseteq \mathbb{E}$, für geeignetes $n \geq 3$, die sich paarweise nur an den Kanten überlappen dürfen und deren Ecken dabei nur mit Ecken zusammentreffen dürfen.

- (a) Beschreiben Sie die Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{E})$.
- (b) Zeigen Sie, daß es im wesentlichen¹ nur drei verschiedene Arten von platonischen Pflasterungen von $\mathbb{E}$ gibt, und zwar zu den Parametern $n \in \{3, 4, 6\}$.
- (c) Bestimmen Sie zu jeder der drei platonischen Pflasterungen $\mathcal{P}$ von $\mathbb{E}$ jeweils die Untergruppe aller $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{E})$, die $\mathcal{P}$ in sich überführen.

Aufgabe 1.2

- (a) Überprüfen Sie, daß die Transformation $\tau: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$ einen Homöomorphismus von der erweiterten oberen Halbebene $\overline{\mathbb{H}}$ auf die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ vermittelt. Berechnen Sie die Bilder von $0, -1, 1, \infty, i$ unter τ .

Bemerkung. Die Transformation τ ist im wesentlichen die sogenannte *Cayley-Transformation*.

- (b) Zeigen Sie, daß $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ über Möbiustransformationen „distanztransitiv“ auf der hyperbolischen Ebene wirkt: Für $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{H}$ mit $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ existiert stets ein $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $\tau_A.z_1 = w_1$ und $\tau_A.w_1 = w_2$.²

Aufgabe 1.3

- (a) Überprüfen Sie, daß Wegintegrale über die Bogenlänge invariant unter bijektiven, stückweise stetig differenzierbaren Umparametrisierungen ihres Integrationsweges sind.
- (b) Überprüfen Sie, daß der in der Vorlesung definierte hyperbolische „Abstand“ $d_{\mathbb{H}}$ auf $\mathbb{H}$ symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung erfüllt.

Aufgabe 1.4

Überprüfen Sie, daß $\varrho: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z = x + yi \mapsto -\bar{z} = -x + yi$ eine Isometrie von der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ in sich induziert. Wird diese Isometrie von einer Möbiustransformation τ_A mit $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ vermittelt?

¹d. h. bis auf Skalierung, Verschiebung und Rotation

²Die $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zugeordnete Möbiustransformation $\tau_A: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist durch $\tau_A.z = \frac{az+b}{cz+d}$ erklärt.